

**HILBERT-PRÄQUANTENBÜNDEL
UND
HAMILTONSCHE DYNAMIK**

von

Christian G ü n t h e r

**Inauguraldissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
am Fachbereich Mathematik
der Freien Universität Berlin**

Juni 1976

**HILBERT-PRÄQUANTENBÜNDEL
UND
HAMILTONSCHE DYNAMIK**

von
Christian Günther

Inauguraldissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
am Fachbereich Mathematik
der Freien Universität Berlin

Juni 1976

Referenten: Prof.Dr. H. Pachale
Ass.Prof. Dr. R. Zavodnik
Priv.Doiz. Dr. K.-E. Hellwig

Termine der mündlichen Prüfungen: 15. 7. 1976
9. 8. 1976



Inhalt

Einleitung	1
1. Präsymplektische Mannigfaltigkeiten	4
2. Linienbündel und Torusbündel	11
3. Präquantenbündel	16
4. Projektive Hilberträume	21
5. Quantendynamik	25
6. Der Präquantisierungsfunktor	29
7. Präquantisierung und klassische Statistik	34
8. Präquantisierung präsymplektischer Mannigfaltigkeiten	37
9. Klassische und relativistische Teilchendynamik	49
Literatur	56
Bezeichnungen	58

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

In der symplektischen Formulierung der klassischen Hamiltonschen Mechanik werden die reinen Zustände durch die Elemente einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) dargestellt. Observable werden durch stetige Funktionen auf M beschrieben. Die symplektischen Abbildungen sind dabei die Isomorphismen des Systems und die Dynamik wird durch symplektische Einparametergruppen, d.h. durch Flüsse von hamiltonschen Vektorfeldern auf M bestimmt.

Vermittels der Poissonklammern bildet der Ring $\mathcal{F}M$ aller C^∞ -Funktionen auf M (d.h. aller C^∞ -Observable) eine Lie-Algebra.

In der Hilbertraumformulierung der Quantenmechanik werden die reinen Zustände durch die eindimensionalen Unterräume eines komplexen Hilbertraumes $\mathcal{H}$ gegeben. Die Dynamik der Quantenmechanik wird durch die Schrödingergleichung bestimmt, die den Fluß eines unendlichdimensionalen Hamiltonsystems auf dem Hilbertraum beschreibt. Observable sind in der Quantentheorie selbstadjungierte Operatoren auf $\mathcal{H}$.

Ein klassisches Problem der Quantentheorie ist es, einen Lie-Algebren-Morphismus von den klassischen in die Quantenobservable zu finden. Dieses Problem wurde von Kostant [13] und Souriau [24] durch das Verfahren der geometrischen Präquantisierung gelöst. Die Präquantisierung stellt einen ersten, leider physikalisch schwer zu interpretierenden Schritt der Quantisierung eines klassischen mechanischen Systems dar. Die Idee der Präquantisierung besteht darin, zuerst einmal

- in Analogie zur Quantenmechanik - die klassische Mechanik in eine Mechanik mit Phasenfaktoren umzuformulieren. Das führt dann zum Begriff des Präquantenbündels.

In der vorliegenden Arbeit wird die Struktur solcher Präquantenbündel eingehend untersucht. Als die natürlichen Objekte zur Formulierung einer hamiltonschen Dynamik mit Phasenfaktoren spielen diese Bündel auch außerhalb der Präquantisierungstheorie eine wichtige Rolle. In Hinblick auf die verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten wurde die Untersuchung gleich auf unendlichdimensionale Bündel ausgedehnt. Außerdem werden einige Anwendungen diskutiert.

Im einzelnen ist die Arbeit folgendermaßen aufgebaut: Kapitel 1 hat einführenden Charakter. Es werden die notwendigen Resultate aus der präsymplektischen Geometrie zusammengestellt. Viele dieser Sätze sind schon in [8] zu finden und werden daher ohne Beweis zitiert.

In Kapitel 2 wird die für alles folgende fundamentale Äquivalenz zwischen Torusbündeln mit Zusammenhang und gewissen Linienbündeln gezeigt. Auf dieser Äquivalenz beruhen alle weiteren Strukturuntersuchungen.

Die Kapitel 3 und 4 bilden den ersten Schwerpunkt der Arbeit. In 3 werden Präquantenbündel systematisch untersucht. Dabei werden für einige der fundamentalen Resultate von B.Kostant völlig neue Beweise geliefert. Ein wesentliches Resultat ist die symplektische Struktur auf dem Totalraum eines Präquantenbündels. Diese erlaubt, es die Dynamik mit Phasenfaktoren auch als Hamiltonsche Dynamik zu beschreiben.

In 4 wird dann das wichtigste unendlichdimensionale Beispiel gegeben: Die projektive Faserung eines Hilbertraumes bildet ein Präquantenbündel.

Die nächsten drei Kapitel liefern dann Anwendungen dieser Ergebnisse. In Umkehrung der ursprünglichen Idee erlaubt das Hilbertraumbeispiel, die Dynamik der Quantenmechanik auch ohne Phasenfaktoren zu formulieren. Das geschieht in 5 und liefert stärkere Analogien zwischen den Strukturen klassischer und quantenmechanischer Systeme als es ohne Benutzung der Präquantenbündel möglich ist. In 6 wird dann die Präquantisierung von B.Kostant in etwas verallgemeinerter Form als Funktor dargestellt. Das Kapitel 7 ist von phänomenologischen Charakter und deutet einige interessante Beziehungen zwischen Präquantisierung und klassischer Statistik an. Diese sollen eine mögliche physikalische Interpretation der Präquantisierung erleichtern.

Einen weiteren Schwerpunkt der Arbeit stellt Kapitel 8 dar. Es wird -in Hinblick auf Anwendungen in der relativistischen Mechanik- eine Verallgemeinerung des Präquantisierungsformalismus auf präsymplektische Mannigfaltigkeiten konstruiert. Es wird untersucht unter welchen Voraussetzungen auch in diesem Fall ein präquantisierender Hilbertraum zu bekommen ist und es wird eine sehr allgemeine Form einer Prä-Klein-Gordon-Gleichung angegeben. Schließlich werden diese Ergebnisse in Kapitel 8 auf allgemeine Teilchensysteme angewandt.

Alle notwendigen Voraussetzungen über symplektische Geometrie lassen sich in [1], [17], [20] finden. Die Begriffe und Sätze über Prinzipalbündel wurden alle [9] entnommen und zur Theorie unendlichdimensionaler Mannigfaltigkeiten sehe man [6], [15], [20], [26]. Ein Symbolverzeichnis findet sich am Schluß der Arbeit.

1. Präsymplektische Mannigfaltigkeiten

Die vorliegende Darstellung der Präquantisierungstheorie beruht auf einigen Struktursätzen über Kontaktmannigfaltigkeiten. Außerdem werden in Kapitel 8 einige Begriffe und Sätze über präsymplektische Mannigfaltigkeiten benötigt, um eine entsprechende Verallgemeinerung der Präquantisierung auf relativistische Systeme herleiten zu können.

Dazu werden in diesem Kapitel die wichtigsten Begriffe und Aussagen aus der Theorie der präsymplektischen Mannigfaltigkeiten zusammengestellt. Die meisten Ergebnisse findet man auch schon in [8] dargestellt. Deshalb wird hier auf entsprechende Beweise verzichtet. Für weitergehende Aussagen über präsymplektische Geometrie sei ebenfalls auf [8] verwiesen, man findet dort auch die Anwendungen präsymplektischer Mannigfaltigkeiten auf die relativistische Teilchendynamik dargestellt.

1.1.Definition: Sei E ein reeller Banachraum, $\omega: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige antisymmetrische Bilinearform, $\omega^b: E \rightarrow E'$ die induzierte lineare Abbildung.

ω heißt präsymplektisch, wenn ω^b offen ist und wenn gilt:

$$\dim \text{Ker } \omega^b = \text{codim Bild } \omega^b = k \in \mathbb{N}$$

k heißt die Charakteristik von ω .

1.2.Definition: Sei M eine Banachmannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega^2 M$ eine geschlossene 2-Form. (M, ω) heißt präsymplektische Mannigfaltigkeit der Charakteristik k , wenn gilt:

Für alle $m \in M$ ist ω_m präsymplektische Form auf $T_m M$ der Charakteristik k .

1.3.Folgerung: Sei (M, ω) präsymplektische Mannigfaltigkeit.

$CM := \text{Ker } \omega$ ist k -dimensionales involutives Unterbündel von TM , das charakteristische Bündel.

$\mathcal{C}M := \Gamma^\infty CM = \{X \in \mathcal{X}M \mid X \lrcorner \omega = 0\}$ ist der $\mathcal{F}M$ -Modul der charakteristischen Vektorfelder auf M .

1.4. Definition: Sei (M, ω) präsymplektische Mannigfaltigkeit. CM ist involutiv und induziert daher auf M eine Faserung in k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten, die charakteristische Faserung. Durch $m \sim m' \Leftrightarrow m$ und m' liegen auf derselben Faser

$\Leftrightarrow$ es gibt eine m mit m' verbindende Kurve $c: I \rightarrow M$ mit $\dot{c}(t) \in CM$ für alle $t \in I \subset \mathbb{R}$.

erhält man eine Äquivalenzrelation.

Auf $\underline{M} := M/CM$ gibt es genau eine Topologie derart, daß die kanonische Projektion $p: M \rightarrow \underline{M}$ stetig, surjektiv und offen ist. (M, ω) heißt regulär, wenn die charakteristische Faserung regulär ist, d.h. wenn $\underline{M}$ eine mit der finalen Topologie verträgliche C^∞ -Struktur besitzt, die p zu einer Submersion macht.

1.5. Satz: Ist (M, ω) regulär, so erhält man eine exakte Sequenz von Vektorbündeln:

$$0 \longrightarrow CM \longrightarrow TM \longrightarrow p^* TM \longrightarrow 0$$

Außerdem gibt es eine eindeutig bestimmte symplektische Form ω auf $\underline{M}$ mit $p^* \omega = \omega$.

1.6. Definition: Sei (M, ω) präsymplektisch. Man definiere:

$\mathcal{C}M := \{X \in \mathcal{X}M \mid X \lrcorner \omega = 0\}$ die charakteristischen Vektorfelder

$\mathcal{H}_l M := \{X \in \mathcal{X}M \mid L_X \omega = 0\}$ die lokal hamiltonschen Vektorfelder

$\mathcal{H}M := \{X \in \mathcal{X}M \mid X \lrcorner \omega = df \text{ exakt}\}$ die global hamiltonschen Vektorfelder

$\mathcal{F}hM := \{f \in \mathcal{F}M \mid df|_m \in \text{Bild } \omega_m^b\}$ die hamiltonschen Funktionen

$b: \mathcal{X}M \rightarrow \mathcal{X}'M, X \mapsto X \lrcorner \omega$ der musikalische Homomorphismus

Bemerkung: In den Anwendungen auf Teilchensysteme werden die Fasern von CM als feine Zustände und die Elemente von $\mathcal{F}hM$ als Observable interpretiert.

1.7. Lemma: 1. $\mathcal{C}M \subset \mathcal{H}M \subset \mathcal{H}_l M \subset \mathcal{X}M$

$\mathcal{C}M$ ist $\mathcal{F}M$ -Untermodule, $\mathcal{H}M, \mathcal{H}_l M$ sind $\mathbb{R}$ -Unterräume von $\mathcal{X}M$

2. $\mathcal{H}_l M$ und $\mathcal{H}M$ sind Lie-Unteralgebren von $\mathcal{X}M$

3. $\mathcal{C}M$ und $\mathcal{H}M$ sind Lie-Ideale in $\mathcal{H}_l M$, nicht in $\mathcal{X}M$

4. $\mathcal{F}hM = \{f \in \mathcal{F}M \mid \mathcal{C}M \lrcorner df = 0\}$, d.h. $f \in \mathcal{F}hM \Leftrightarrow f$ ist konstant auf den charakteristischen Fasern

5. $b: \mathcal{X}M \rightarrow \mathcal{X}'M$ ist $\mathcal{F}M$ -linear und $\text{Bild } b = \mathcal{C}M^\perp = \{\alpha \in \Omega^1 M \mid \alpha(\mathcal{C}M) = 0\}$

6. $d(\mathcal{F}hM) = b(\mathcal{H}M)$.

1.8. Definition/Satz:

1. Auf $\mathcal{H}M := \mathcal{H}M / \mathcal{C}M$ gibt es eine eindeutig bestimmte Lie-Algebrenstruktur, die die natürliche Projektion $\mathcal{H}M \rightarrow \mathcal{H}M$ zu einem Lie-Algebrenhomomorphismus macht.
2. $\mathcal{G}: \mathcal{F}hM \rightarrow \mathcal{H}M$, $f \mapsto G_f := \{X \in \mathcal{H}M \mid X \lrcorner \omega = df\}$ ist surjektiv linear und $\text{Ker } \mathcal{G} = \{f \in \mathcal{F}hM \mid f \text{ konstant}\}$.
3. Durch $\{f, g\} := G_f \lrcorner G_g \lrcorner \omega$ mit $G_f \in \mathcal{G}_f$, $G_g \in \mathcal{G}_g$ wird $\mathcal{F}hM$ zu einer Lie-Algebra. $\{.,.\}$ heißen Poissonklammern.
4. Es gilt: $[G_f, G_g] \lrcorner \omega = d\{f, g\}$ $G_f \in \mathcal{G}_f$, $G_g \in \mathcal{G}_g$

1.9. Theorem: Sei (M, ω) präsymplektische Mannigfaltigkeit.

Dann ist die Sequenz von Lie-Algebren

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{F}hM \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{H}M \longrightarrow 0$$

exakt und stellt eine zentrale Erweiterung von $\mathcal{H}M$ durch $\mathcal{R}$ dar.

1.10. Bemerkung: Präsymplektische Mannigfaltigkeiten (M, ω) sind lokal als gefaserte Mannigfaltigkeiten über einer symplektischen Basis interpretierbar. $\mathcal{C}M$ ist in diesem Sinne als Modul der vertikalen Vektorfelder und $\mathcal{F}hM$ als Ring der Funktionen auf der Basis aufzufassen. Die Operation $\mathcal{G}$ entspricht dann der Bildung des hamiltonschen Vektorfeldes auf der Basis und 1.9. stellt eine natürliche Verallgemeinerung der exakten Sequenz für hamiltonsche Vektorfelder auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit dar. Für den regulären Fall ergibt sich daher:
Ist (M, ω) regulär, so erhält man mit 1.5. die Lie-Algebra Isomorphismen:

$$\mathcal{F}hM \longrightarrow \mathcal{F}M, \quad \mathcal{H}M \longrightarrow \mathcal{H}M;$$

Außerdem ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{F}hM & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathcal{H}M \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{F}M & \xrightarrow{f \mapsto df^*} & \mathcal{H}M \longrightarrow 0 \end{array}$$

kommutativ mit exakten Zeilen.

1.11. Definition: (Morphismen präsymplektischer Mannigfaltigkeiten)
Seien (M, ω) und (M', ω') präsymplektisch, $F: M \rightarrow M'$ C^∞ -Abbildung.
 F heißt präsymplektischer Morphismus, wenn gilt:

$$F^* \omega' = \omega$$

1.12. Folgerung: Sei $F: (M, \omega) \rightarrow (M', \omega')$ präsymplektisch. Dann gilt:

- a) $TF(CM) \subset CM'$
- b) $\text{Ker} TF \subset CM$
- c) $F^*(\mathcal{F}hM') \subset \mathcal{F}hM$

1.13. Definition: Sei (M, ω) präsymplektisch.

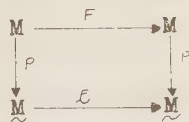
$\text{Präs}(M, \omega) := \{ F \in \text{Diff}(M) \mid F \text{ präsymplektisch} \}$
(Die Präsymplektomorphismengruppe von (M, ω))

$\text{Präs}^0(M, \omega) := \{ F \in \text{Präs}(M, \omega) \mid F(m) \sim m \text{ für alle } m \in M \}$ (vgl. 1.4.)
($\text{Präs}^0(M, \omega)$ ist Normalteiler in $\text{Präs}(M, \omega)$)

$\underline{\text{Präs}}(M, \omega) := \text{Präs}(M, \omega) / \text{Präs}^0(M, \omega)$

1.14. Bemerkung: Für $X \in \mathcal{H}_\ell M$ bzw. $\mathcal{H}M$ ist der Fluß F_t von X eine lokale 1-Parametergruppe von präsymplektischen Morphismen.
Für $X \in \mathcal{H}M$ liegt der Fluß von X entsprechend in $\text{Präs}^0(M, \omega)$.
Daher kann man $\mathcal{H}_\ell M$ bzw. $\mathcal{H}M$ formal als Lie-Algebra von $\text{Präs}(M, \omega)$ und $\mathcal{H}M$ als Lie-Algebra von $\text{Präs}^0(M, \omega)$ auffassen. Die Lie-Algebra von $\underline{\text{Präs}}(M, \omega)$ wäre dann entsprechend $\mathcal{H}M$.

Ist (M, ω) regulär, so induziert jeder Präsymplektomorphismus F einen Symplektomorphismus $\underline{F}$ auf $\underline{M}$.
 $\text{Präs}^0(M, \omega)$ besteht dann genau aus den Morphismen, die auf $\underline{M}$ die Identität induzieren.



1.15. Definition: Sei M eine Banach-Mannigfaltigkeit, $\vartheta \in \Omega^1 M$ eine 1-Form auf M . Definiere $\omega := -d\vartheta$.

(M, ϑ) heißt Kontaktmannigfaltigkeit, wenn gilt:

- 1) (M, ω) ist präsymplektische Mannigfaltigkeit der Charakteristik 1
- 2) $\text{Ker } \omega \oplus \text{Ker } \vartheta = TM$

1.16. Bemerkung: Auf einer Kontaktmannigfaltigkeit bilden die charakteristischen Vektorfelder einen eindimensionalen $\mathcal{FM}$ -Modul. Es gibt ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld Z mit

$$Z \lrcorner \omega = 0 \quad \text{und} \quad Z \lrcorner \vartheta = 1$$

$\{Z\}$ ist Basis von $\mathcal{CM}$. Z heißt das Cartan-Vektorfeld auf (M, ϑ) .

1.17. Definition: Seien (M, ϑ) und (M', ϑ') Kontaktmannigfaltigkeiten.

$F: M \rightarrow M'$ heißt Kontaktmorphismus, wenn gilt: $F^* \vartheta' = \vartheta$. Definiere:

$\text{Kont}(M, \vartheta) := \{F \in \text{Diff}(M) \mid F^* \vartheta = \vartheta\}$ die (spezielle) Kontaktgruppe.

$\mathcal{PM} := \{X \in \mathcal{XM} \mid \mathbb{L}_X \vartheta = 0\}$ die (speziellen) Kontaktfelder.

1.18. Bemerkung: $\text{Kont}(M, \vartheta) \subset \text{Präs}(M, \omega)$ und $\mathcal{PM} \subset \mathcal{HM}$

als Untergruppe bzw. Unter-Lie-Algebra (für $X \in \mathcal{PM}$ gilt: $X \lrcorner \omega = d(X \lrcorner \vartheta)$).

$\mathcal{PM}$ ist formal die Lie-Algebra von $\text{Kont}(M, \vartheta)$.

1.19. Definition: Sei (M, ϑ) Kontaktmannigfaltigkeit. $f \in \mathcal{FM}$.

a) G_f ist eindeutig definiert durch $G_f \lrcorner \omega = df$ und $G_f \lrcorner \vartheta = 0$.

b) P_f ist eindeutig definiert durch $P_f \lrcorner \omega = df$ und $P_f \lrcorner \vartheta = f$.

Es ergibt sich $G_f \in \mathcal{G}_f$ und man erhält die Formel:

$$P_f = G_f + f \cdot Z$$

1.20. Theorem: Sei (M, ϑ) eine Kontaktmannigfaltigkeit.

Dann ist die Abbildung $P: \mathcal{FM} \rightarrow \mathcal{PM}$ ein Lie-Algebren-Isomorphismus mit $\lrcorner \vartheta (X \mapsto X \lrcorner \vartheta)$ als Inversem.

Beweis von 1.20: Für $f \in \mathcal{H}M$ gilt $\mathbb{L}_{P_f} \lrcorner \vartheta = P_f \lrcorner d\vartheta + dP_f \lrcorner \vartheta = 0$ und daher ist $P_f \in \mathcal{P}M$.

Nach Definition gilt $P_f \lrcorner \vartheta = f$. Um $P_{X \lrcorner \vartheta} = X$ für alle $X \in \mathcal{P}M$ zu zeigen, benutzt man die Zerlegung von TM nach 1.15.2):

$$\begin{aligned} P_{X \lrcorner \vartheta} \lrcorner \vartheta &= X \lrcorner \vartheta \text{ nach Definition und } P_{X \lrcorner \vartheta} \lrcorner d\vartheta = -d(X \lrcorner \vartheta) = \\ &= -\mathbb{L}_X \vartheta + X \lrcorner d\vartheta = X \lrcorner d\vartheta \text{ da } X \text{ aus } \mathcal{P}M. \text{ Daher stimmen die Komponenten} \\ &\text{von } P_{X \lrcorner \vartheta} \text{ und } X \text{ überein, also } P_{X \lrcorner \vartheta} = X. \end{aligned}$$

Es bleibt die Lie-Algebra-Isomorphie zu zeigen:

Nach Definition gilt $P_{\{f,g\}} \lrcorner \vartheta = \{f,g\}$, daher ist $\lrcorner \vartheta$ Lie-Algebra-Morphismus. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} [P_f, P_g] \lrcorner \vartheta &= \mathbb{L}_{P_f} P_g \lrcorner \vartheta = \{f,g\} = P_{\{f,g\}} \lrcorner \vartheta \text{ und} \\ [P_f, P_g] \lrcorner \omega &= dP_f \lrcorner P_g \lrcorner \omega = d\{f,g\} = P_{\{f,g\}} \lrcorner \omega. \text{ Damit: } P_{\{f,g\}} = \overline{[P_f, P_g]} \end{aligned}$$

Für eine Kontaktmannigfaltigkeit (M, ϑ) werde definiert:

$M_{\mathbb{R}^+} := \mathbb{R}^+ \times M$ und $p: M_{\mathbb{R}^+} \rightarrow M, s: M_{\mathbb{R}^+} \rightarrow \mathbb{R}^+$ die natürlichen Projektionen. Dann ist $(M_{\mathbb{R}^+}, p, M, \mathbb{R}^+)$ ein Prinzipal- $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ -Bündel mit $d(\log s)$ als natürlicher Zusammenhangsform.

Die 2-Form $-d(s \cdot p^* \vartheta) = -ds \wedge p^* \vartheta - s \cdot p^* d\vartheta$ ist nicht degeneriert und $\mathbb{R}^+$ -equivariant. Daher folgt:

1.21.Satz: $(\mathbb{R}^+ \times M, -d(s \cdot p^* \vartheta))$ ist eine symplektische Mannigfaltigkeit

Für einen Kontaktmorphismus $F: (M_1, \vartheta_1) \rightarrow (M_2, \vartheta_2)$ ist

$$1_{\mathbb{R}^+} \times F: (\mathbb{R}^+ \times M_1, -d(s_1 \cdot p_1^* \vartheta_1)) \rightarrow (\mathbb{R}^+ \times M_2, -d(s_2 \cdot p_2^* \vartheta_2))$$

ein $\mathbb{R}^+$ -equivarianter symplektischer Bündelmorphismus.

Daher ist die Zuordnung $M \mapsto M_{\mathbb{R}^+}, F \mapsto 1_{\mathbb{R}^+} \times F$ ein kovarianter Funktor von der Kategorie der Kontaktmannigfaltigkeiten in die Kategorie der symplektischen Mannigfaltigkeiten.

Darüberhinaus erhält man: Für $X \in \mathfrak{X}M$ gibt es eine eindeutige Fortsetzung von X zu einem horizontalen, R^+ -invarianten Vektorfeld $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(R^+ \times M)$. Damit erhält man einen Lie-Algebra-Isomorphismus $\sim : \mathfrak{X}M \longrightarrow \mathfrak{X}_{\text{hor}}^{\text{inv}}(R^+ \times M)$. $\sim$ ist der Lie-Algebra-Isomorphismus zum Gruppenisomorphismus $\text{Diff}(M) \longrightarrow \text{Aut}^{\text{equ}}(R^+ \times M)$, $F \longmapsto 1_{R^+} \times F$.

1.22.Satz: Sei $X \in \mathfrak{X}M$. Dann ist $\tilde{X}$ genau dann ein hamiltonsches Vektorfeld auf $(R^+ \times M, -d(s \cdot p^* \vartheta))$, wenn $X \in \mathfrak{P}M$ ist. $\sim$ definiert daher einen Lie-Algebra-Isomorphismus $\mathfrak{P}M \longrightarrow \mathfrak{H}^{\text{inv}}(R^+ \times M)$ von den Kontaktvektorfeldern von M auf die invarianten Hamiltonfelder in $R^+ \times M$. Entsprechend ist $F \longmapsto 1_{R^+} \times F$ ein Isomorphismus $\text{Kont}(M, \vartheta) \longrightarrow \text{Spl}(R^+ \times M, -d(s \cdot p^* \vartheta))$.

Für $f, g \in \mathfrak{H}M$ gilt $\{s \cdot f \circ p, s \cdot g \circ p\} = s \cdot \{f, g\} \circ p$, wobei die Poissonklammern einmal auf M bezüglich $-d\vartheta$ und einmal auf $R^+ \times M$ bezüglich der symplektischen Struktur zu nehmen sind.

1.23.Satz: Bezeichne mit $\mathfrak{H}^{\text{equ}}(R^+ \times M)$ alle Funktionen $f \in \mathcal{F}^{\text{equ}}(R^+ \times M)$ für die gilt: $X \lrcorner df = 0$ für alle $X \in \mathcal{E}M$. Dann ist die Abbildung $\mathfrak{H}M \longrightarrow \mathfrak{H}^{\text{equ}}(R^+ \times M)$, $f \longmapsto s \cdot f \circ p$ ein Lie-Algebra-Isomorphismus und es gilt: $P_f \lrcorner -d(s \cdot p^* \vartheta) = d(s \cdot f \circ p)$, d.h. $s \cdot f \circ p$ ist die Hamiltonfunktion von P_f .

Außerdem erhält man noch: $Z \lrcorner -d(s \cdot p^* \vartheta) = ds$, da $Z = P_1$ und für $f \in \mathfrak{H}M$: $G_f \lrcorner -d(s \cdot p^* \vartheta) = d(f \circ p) \cdot s$.

2. Linienbündel und Torusbündel

Im folgenden werden einige Beziehungen zwischen Prinzipal-Torus-Bündeln und hermitischen Linienbündeln untersucht. Alle hier benutzten Aussagen über Prinzipalbündel und assoziierte Vektorbündel sind in [9] nachzulesen.

2.1.Definition: Ein Linienbündel über einer Banachmannigfaltigkeit M ist ein eindimensionales komplexes Vektorbündel über M . Jedes Linienbündel (L, π, M) über M ist zu einem Prinzipal- $\mathbb{C}^*$ -Bündel $\dot{L} = (\dot{L}, \dot{\pi}, M, \dot{\mathbb{C}})$ assoziiert, mit $\dot{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen $\neq 0$. Wegen $L = \dot{L} \times_{\dot{\mathbb{C}}} \mathbb{C}$ und $\dot{L} = \dot{L} \times_{\dot{\mathbb{C}}} \dot{\mathbb{C}}$ gilt $\dot{L} = L \backslash \text{Nullschnitt}$. Somit erhält man

2.2.Satz: Es gibt eine bijektive Beziehung zwischen Linienbündeln L und Prinzipal- $\mathbb{C}^*$ -Bündeln $\dot{L}$ über einer Banachmannigfaltigkeit M .

Sei $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hermitisches Linienbündel über M . Als ein Σ -Bündel ist $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ in natürlicher Weise zu einem Prinzipal-Torus-Bündel $L^0 = (L^0, \pi^0, M, \mathbb{T})$ assoziiert. Für $r \in \mathbb{R}^+$ sei $S^r(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ das Bündel der r -Sphären in $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$:
 $S^r(L, \langle \cdot, \cdot \rangle) := \{x_m \in L \mid \langle x_m, x_m \rangle = r^2\}$. Da $L = L^0 \times_{\mathbb{T}} \mathbb{C}$ und $S^r(L, \langle \cdot, \cdot \rangle) = L^0 \times_{\mathbb{T}} S^r(\mathbb{C})$, erhält man zu jedem $r \in \mathbb{R}^+$ einen Faserbündelisomorphismus $S^r(L) \longrightarrow L^0$, der von der Isomorphie zwischen $S^r(\mathbb{C})$ und $\mathbb{T}$ stammt.

2.3.Satz: Es gibt eine bijektive Beziehung zwischen Hermitischen Linienbündeln und Prinzipal-Torus-Bündeln über einer Banachmannigfaltigkeit M .

Außerdem erhält man zu jedem $r \in \mathbb{R}^+$ Inklusionen $L^0 \xrightarrow{i_r} \dot{L} \hookrightarrow L$.

2.4.Bezeichnungen: Sei $P = (P, \tau, M, G)$ ein Prinzipal-G-Bündel

über einer Banachmannigfaltigkeit M mit G abelsch. Die

Operation von G auf P , $A: G \times P \rightarrow P$ induziert einen Lie-Algebra-

Morphismus $\hat{\cdot}: LG \rightarrow \mathcal{X}P$, $\varrho \mapsto \hat{\varrho}$ mit $\hat{\varrho}(x) = \frac{d}{dt}(x \cdot \exp(t \cdot \varrho))_{t=0}$

für $\varrho \in LG$ und $x \in P$. $\hat{\varrho}$ heißt das Fundamentalektorfeld, das von ϱ induziert wird. $\hat{\varrho}$ ist vertikal und G -invariant.

Eine LG wertige 1-Form $\alpha \in \Omega^1(P, LG)$ heißt Zusammenhangsform

wenn gilt: $L_{\hat{\varrho}} \alpha = 0$ und $\hat{\varrho} \lrcorner \alpha = \varrho$ für alle $\varrho \in LG$.

$\text{Hor } P := \text{Ker } \alpha$ ist das zugehörige Horizontalbündel und es gilt:

$\text{Hor } P \oplus \text{Ver } P = TP$. $H: TP \rightarrow \text{Hor } P$ und $V = H^{-1}: TP \rightarrow \text{Ver } P$ heißen die

Horizontal-bzw. Vertikalprojektion.

Auf jedem assoziierten Vektorbündel $E = (E, \rho, M)$ induziert α

eine kovariante Ableitung $\nabla: \Gamma^\infty E \rightarrow \text{Hom}(TM, E)$ und ein entsprechendes Horizontalbündel in E .

Sei (E, ∇) komplexes Vektorbündel mit komplexer kovarianter Ableitung.

Eine Hermite-Struktur $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf E heißt ∇ -affin (oder α -invariant),

wenn für alle C^∞ -Schnitte $s, s' \in \Gamma^\infty E$ gilt:

$$d\langle s, s' \rangle = \langle \nabla s, s' \rangle + \langle s, \nabla s' \rangle$$

Der Realteil $\text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$ von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine riemannsche und der Imaginärteil eine symplektische Struktur auf E .

Diese beiden Strukturen stehen durch die komplexe Struktur i

auf E in Beziehung: $\text{Re} \langle x, y \rangle = \text{Im} \langle ix, y \rangle$ für alle $x, y \in E$.

Wegen der $\mathbb{C}$ -Linearität von ∇ gilt: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ∇ -affin dann und

nur dann, wenn $\text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$ ∇ -affin ist, d.h. wenn ∇ -bezüglich $\text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$ riemannscher Zusammenhang ist.

Mit Standardsätzen der riemannschen Geometrie (vgl. [6], [9]) erhält

man damit: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist genau dann ∇ -affin, wenn die zugehörigen

Horizontalräume $\text{Hor}_x E$, $x \in E$ zum Sphärenbündel $S^r(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit $r = |x|$

und $|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ tangential sind, d.h. man erhält:

2.5.Satz: Sei (L^C, α^C) ein Prinzipal-Torus-Bündel mit Zusammenhang und (L, ∇) das assoziierte Linienbündel mit der induzierten kovarianten Ableitung. Für eine Hermitestruktur $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf L sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ∇ -affin.
2. Für alle $x \in L$ gilt: $\text{Hor}_x L \subset TS^{|\cdot|} L$
3. Für alle $r \in \mathbb{R}^+$ ist die Inklusion $1_r: L^C \hookrightarrow L$ zusammenhangserhaltend, d.h. $T1_r(\text{Hor}_x L^C) \subset \text{Hor}_{1_r(x)} L$ für alle $x \in L^C$.

In diesem Falle definiert $\text{Hor} L|_{S^r(L)}$ ein Horizontalbündel auf $S^r(L)$ und es gilt $T1_r(\text{Hor} L^C) = \text{Hor} L|_{S^r(L)}$.

Beweis: Die Äquivalenz von 1. und 2. ist auf Grund der vorhergehenden Bemerkungen klar und für 3. bemerke man, daß gilt:

$1_r = q|_{L^C \times S^r(\mathbb{C})}$, wobei $q: L^C \times \mathbb{C} \rightarrow L$ die natürliche Projektion ist.

2.6.Korollar: Es besteht eine bijektive Beziehung zwischen Prinzipal-Torus-Bündeln mit Zusammenhang (L^C, α^C) und Linienbündeln mit (komplexer) kovarianter Ableitung und affiner Hermitestruktur $(L, \nabla, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ über einer Banachmannigfaltigkeit M . Darüberhinaus erhält man für jedes positive $r \in \mathbb{R}^+$ Bünделеinbettungen:

$$L^C \xrightarrow{1_r} L^* \hookrightarrow L \quad \text{und} \quad \text{Hor} L^C \xrightarrow{T1_r} \text{Hor} L^* \hookrightarrow \text{Hor} L$$

Daher induziert jedes $r \in \mathbb{R}^+$ eine Bündelisomorphie

$$L \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^+ \times L^C, \quad x_m \longmapsto (x_m, \frac{x_m}{|x_m|} r)$$

Daher ergibt sich mit 2.6. $\text{Hor} L^* = \bigcup_{\mathbb{R}^+} \text{Hor} S^r(L)$ und man kann L^* mit $\mathbb{R}^+ \times L^C$ identifizieren.

Man beachte, daß $(L^*, p, L^C, \mathbb{R}^+)$ ein triviales Prinzipal- $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ -Bündel mit $d(\log(s))$ als Zusammenhangsform ist, wobei $s: L^* \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto |x|$.

Die Überlagerung des Torus $\mathbb{R} \rightarrow \sqrt{\lambda}$ und die Einbettung $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ induzieren einen Lie-Algebra-Homomorphismus $\mathbb{R} = L^{\mathbb{R}} \hookrightarrow L^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$, $t \mapsto \lambda t$, wobei $2\pi/\lambda$ die Periode der Überlagerung darstellt.

2.7.Theorem: Sei $(L^{\mathbb{C}}, \alpha^{\mathbb{C}})$ ein Prinzipal-Torus-Bündel mit Zusammenhangsform $\alpha^{\mathbb{C}}$ und $(L, \nabla, \langle, \rangle)$ das zugehörige Linienbündel mit kovarianter Ableitung ∇ und ∇ -affiner Hermitestruktur $\langle, \rangle$. Dann ist L zum Prinzipal- $\mathbb{C}$ -Bündel $L^{\mathbb{C}}$ assoziiert und die eindeutig bestimmte Zusammenhangsform α auf L , die ∇ auf L induziert, ist gegeben durch:

$$\alpha_x = d(\log |x|) + \frac{1}{\lambda} p^* \alpha_x^{\mathbb{C}} \quad \text{für } x \in L$$

Ist umgekehrt (L, α) ein Prinzipal- $\mathbb{C}$ -Bündel mit Zusammenhangsform und (L, ∇) das assoziierte Linienbündel mit induzierter kovarianter Ableitung ∇ , so gibt es dann und nur dann eine ∇ -affine Hermitestruktur auf (L, ∇) , wenn $\text{Re } \alpha$ exakt ist.

In diesem Falle induziert $\text{Im } \alpha$ durch Einschränkung auf die Sphäre $S^1(L, \nabla, \langle, \rangle)$ eine Zusammenhangsform auf dem zugehörigen Prinzipal-Torus-Bündel $L^{\mathbb{C}} \cong S^1(L)$.

Beweis: Nach den vorausgegangenen Überlegungen bleibt lediglich zu zeigen, daß α Zusammenhangsform auf $L^{\mathbb{C}}$ ist und daß

$$\text{Ker } \alpha = \bigcup_{r \in \mathbb{R}^+} \text{Ti}_r(\text{Hor } L^{\mathbb{C}}). \text{ Sei also } c = a + bi \in \mathbb{C} = L^{\mathbb{C}}.$$

Dann ist $\hat{c}_x = \frac{d}{dt}(e^{ct} \cdot x)_{t=0}$ für alle $x \in L$ und daher

$$\begin{aligned} \hat{c} \lrcorner \alpha_x &= \frac{d}{dt} \log \langle e^{ct} x, e^{ct} x \rangle \Big|_{t=0}^{1/2} + \frac{1}{\lambda} p^* \alpha^{\mathbb{C}} \left(\frac{d}{dt} e^{ct} x \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(e^{at} \langle x, x \rangle^{1/2} \right) \Big|_{t=0} + \frac{1}{\lambda} p^* \alpha^{\mathbb{C}} \left(\frac{d}{dt} e^{ct} x \right) \Big|_{t=0} \\ &\quad (\text{Logarithmisches Differenzieren}) \\ &= a + \frac{1}{\lambda} \alpha^{\mathbb{C}}(\lambda \hat{b}_p(x)) = a + bi, \text{ da } \alpha^{\mathbb{C}} \text{ Zusammenhangsform ist.} \end{aligned}$$

Der Rest des Beweises folgt aus der Zerlegung

$$TL \cong TR^+ \times TL^{\mathbb{C}} \cong TR^+ \times \text{Ver } L^{\mathbb{C}} \oplus_{\mathbb{R}} \text{Hor } L^{\mathbb{C}} \quad \text{und aus 2.6.}$$

Bemerkung: Im folgenden wird $\lambda=1$ gesetzt. Nur bei der Anwendung auf die Präquantisierung wird gewöhnlich $\lambda = \hbar = \frac{h}{2\pi}$ gesetzt.

2.8.Satz: Seien (L_1^C, α_1^C) $i=1,2$ Prinzipal-Torus-Bündel mit Zusammenhang über M_1 und $(L_1, \nabla^1, \langle, \rangle_1)$ die entsprechenden Linienbündel mit Zusammenhang ∇ und ∇ -affiner Hermitestruktur.

Dann erhält man mittels Fortsetzung bzw. Einschränkung eine bijektive Beziehung zwischen den Zusammenhangserhaltenden

$\mathbb{T}$ -equivarianten Bündelabbildungen $F^C: L_1^C \longrightarrow L_2^C$ und den Zusammenhangserhaltenden $\dot{C}$ -equivarianten isometrischen Bündelabbildungen $F: L_1 \longrightarrow L_2$.

2.9.Satz: Seien (L^C, α^C) und $(L, \nabla, \langle, \rangle)$ wie oben.

Dann gibt es eine bijektive Beziehung zwischen $\mathbb{T}$ -invarianten zusammenhangserhaltenden Vektorfeldern $X^C \in \mathcal{X}^{inv L^C}$ und

$\dot{C}$ -invarianten zusammenhangserhaltenden Vektorfeldern $X \in \mathcal{X}^{inv L}$, die isometrischen Fluß haben.

Die Beweise von 2.8. und 2.9. ergeben sich sofort aus 2.6.

2.10.Bemerkung: Sei $e \in \mathbb{T}$ die Einheit von $\mathbb{T}$. Ist dann $Z = \hat{e} \in \mathcal{X} L^C$, so hat die eindeutige Fortsetzung von Z auf L die Form $i\hat{\lambda} = i\hbar$.

3. Präquantenbündel

3.1. Definition: Sei (M, ω) eine symplektische Banachmannigfaltigkeit. Ein (symplektisches) Präquantenbündel (PQB) über (M, ω) ist ein Prinzipal-Torus-Bündel $(L^{\mathbb{C}}, \alpha^{\mathbb{C}})$ mit Zusammenhangsform über M derart, daß gilt:

$$\omega = -\text{curv } \alpha^{\mathbb{C}} \quad (\text{d.h. } d\alpha^{\mathbb{C}} = -r^{\mathbb{C}*}\omega)$$

Die korrespondierenden Bündel (L, α) und $(L, \nabla, \langle, \rangle)$ werden (komplexe) Präquantenbündel genannt.

3.2. Bemerkungen: Komplexe Präquantenbündel wurden erstmals von B. Kostant [13] zur Konstruktion der Präquantisierungsabbildung eingeführt. 3.4., 3.7. und 3.8. dieses Kapitels gehen auf B. Kostant zurück, doch werden hier andere (teilweise einfachere) auch im unendlichdimensionalen anwendbare Beweise gegeben, indem die Resultate von Kapitel 1 über Kontaktmannigfaltigkeiten verwertet werden.

Da die Klassifizierung von Prinzipalbündeln durch Chernsche Klassen nicht von der endlichen Dimension der Basis abhängt, (siehe [26]) bleiben die Resultate von B. Kostant über die Existenz von PQBs über einer symplektischen Mannigfaltigkeit auch im unendlichdimensionalen Fall gültig und man erhält:

3.3. Theorem: (B. Kostant [13]): Über einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) existiert genau dann ein PQB, wenn ω integral ist. Ist ω integral, so läßt sich die Klasse aller PQBs über (M, ω) durch die Charaktere der Fundamentalgruppe von M parametrisieren. Insbesondere existiert über einfach zusammenhängendem M mit ω integral genau ein PQB.

3.4. Definition: Morphismen und infinitesimale Morphismen

werden wie in 2.8. bzw. 2.9. definiert. Insbesondere:

$$\text{Preq}(L^C, \alpha^C) := \{ F \in \text{Aut} L^C \mid F^* \alpha^C = \alpha^C, F \mathbb{T}\text{-equivariant} \}$$

$$\mathcal{P} L^C := \{ X \in \mathcal{X} L^C \mid L_X \alpha^C = 0, X \mathbb{T}\text{-invariant} \}$$

$$\text{Spl}^L(M, \omega) := \{ g \in \text{Diff}(M) \mid g \text{ ist Basisabbildung zu einem } F \in \text{Preq}(L^C, \alpha^C) \}$$

$$\begin{array}{ccc} L^C & \xrightarrow{F} & L^C \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

Bemerkung: Nach 2.8. und 2.9. ist $\text{Preq}(L^C, \alpha^C)$ isomorph zur Gruppe aller zusammenhangserhaltenden isometrischen Bündelautomorphismen des zugehörigen PQB $(L, \nabla, \langle, \rangle)$ und $\mathcal{P} L^C$ ist Lie-Algebra-isomorph zu den invarianten, zusammenhangserhaltenden Vektorfeldern mit isometrischem Fluß auf L . Diese Objekte sollen im Folgenden nicht mehr unterschieden werden.

3.5. Bemerkung: Da die Elemente von $\text{Preq}(L^C, \alpha^C)$ die Krümmung erhalten, ergibt sich: $\text{Spl}^L(M, \omega) \subset \text{Spl}(M, \omega)$.

Ist M einfach zusammenhängend, so folgt $\text{Spl}^L(M, \omega) = \text{Spl}(M, \omega)$. (B.Kostant [13]).

3.6. Theorem: (B.Kostant [13]): Sei (L^C, α^C) ein PQB über (M, ω) . Dann ist die folgende Sequenz von Gruppen exakt und definiert eine zentrale Erweiterung von $\text{Spl}^L(M, \omega)$ durch den Torus:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{T} & \longrightarrow & \text{Preq}(L^C, \alpha^C) & \longrightarrow & \text{Spl}^L(M, \omega) \longrightarrow 0 \\ & & c \longmapsto i_c & & F \longmapsto \hat{F} & & \end{array}$$

wobei $i_c(x) = c \cdot x$ die natürliche Operation von $\mathbb{T}$ auf L^C ist und $\hat{F}$ stellt die Basisabbildung von F dar.

Beweis: Diese Sequenz ist für jedes Prinzipal-G-Bündel exakt und für abelsches G zentral.

3.7.Satz: Sei (L^C, α^C) ein PQB über (M, ω) .

Dann ist (L^C, α^C) eine Kontaktmannigfaltigkeit.

Beweis: $\text{Ker} \alpha^C = \text{Hor} L^C$ und $\text{Ker}(-d\alpha^C) = \text{Ker} \tau^{G^*} \omega = \text{Ver} L^C$, da $d\alpha^C$ horizontal ist und ω nicht degeneriert ist.

3.8.Korollar: Mit den in Kapitel 1 eingeführten Begriffen erhält man folgende Darstellung von Kontaktmannigfaltigkeiten als Präquantenbündel:

Kontaktmannigfaltigkeit	=	Totalraum L^C
Kontaktform	=	Zusammenhangsform α^C
Präsymplektische Form	=	$-d\alpha^C = \tau^{G^*} \omega$
Charakteristisches Bündel	=	Vertikalbündel $\text{Ver} L^C$
Charakteristische Fasern	=	Fasern von L^C
Quotientenmannigfaltigkeit	=	Basis M

Sei $F \in \text{Diff}(L^C)$ zusammenhangserhaltend: $F^* \alpha^C = \alpha^C$.

Dann gilt $F^* \text{Ker} d\alpha^C = \text{Ker} d\alpha^C$, also ist F fasererhaltend. Außerdem gilt $F^* Z = Z$, da Z durch α^C eindeutig bestimmt ist, damit ist F aber auch $\mathbb{T}$ -equivariant. Somit ist $F \in \text{Preq}(L^C, \alpha^C)$. Und daher:

$\text{Kont}(L^C, \alpha^C)$	=	$\text{Preq}(L^C, \alpha^C)$
$\mathcal{P} L^C$ (wie in 1.17. definiert)	=	$\mathcal{P} L^C$ (wie in 3.4. definiert)
$Z = P_1$	=	$Z = \hat{e}$
$\mathcal{F} h^C$	=	$\mathcal{F} M$
		usw.

3.9.Theorem (B.Kostant [13]): Sei (L^C, α^C) PQB über (M, ω) .

Dann ist $P.: \mathcal{F} M \longrightarrow \mathcal{P} L^C$, $f \longmapsto P_f = G_f + f \circ \tau^C \cdot Z$

mit G_f die horizontale invariante Liftung von $df^* \in \mathcal{H}^M$ ein Lie-Algebren-Isomorphismus.

Beweis: Anwendung von 1.20. auf die Gegenüberstellung in 3.8.

3.10.Korollar: (B.Kostant [13]): Das folgende Diagramm von Lie Algebren ist kommutativ mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{R} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{H}^{\mathbb{C}} \mathfrak{L}^{\mathbb{C}} \\ \mathfrak{F} \mathfrak{M} \end{array} & \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array} & \mathfrak{H} \mathfrak{M} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow \scriptstyle \mathfrak{P} & & \\
 & & & & \mathfrak{F} \mathfrak{M} & &
 \end{array}$$

3.11.Satz: Sei $(\mathfrak{L}^{\mathbb{C}}, \alpha^{\mathbb{C}})$ ein PQB über $(\mathfrak{M}, \omega)$ und $(\mathfrak{L}, \alpha)$ das korrespondierende Prinzipal- $\hat{\mathbb{C}}$ -Bündel. $\mathfrak{p}: \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$ und $\mathfrak{s}: \mathfrak{L} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\mathfrak{s}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$, seien die natürlichen Projektionen bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{L} \cong \mathbb{R}^+ \times \mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$ aus 2.6. Dann ist

$$\Omega := -\mathfrak{d}(\mathfrak{s}^2 \cdot \mathfrak{p}^* \alpha^{\mathbb{C}})$$

eine symplektische Form auf $\mathfrak{L}$.

Beweis: Man wende 1.21. auf 2.6. an.

Mit 1.22. und 1.23. erhält man weiter:

3.12.Korollar: Sei $\text{Spl}(\mathfrak{L}, \Omega)$ die symplektische Gruppe von $(\mathfrak{L}, \Omega)$. Dann gilt $\text{Preq}(\mathfrak{L}, \alpha) \subset \text{Spl}(\mathfrak{L}, \Omega)$ und für $\mathfrak{F} \in \text{Spl}(\mathfrak{L}, \Omega)$ gilt: $\mathfrak{F} \in \text{Preq}(\mathfrak{L}, \alpha)$ genau dann, wenn $\mathfrak{F}$ fasererhaltend und $\hat{\mathbb{C}}$ -equivariant ist

3.13.Korollar: Sei $\mathfrak{H} \mathfrak{L}$ die Lie-Algebra der globalen Hamiltonsysteme auf $(\mathfrak{L}, \Omega)$ und $\mathfrak{H}^{\text{inv}} \mathfrak{L}$ die Unter algebra aller $\hat{\mathbb{C}}$ -invarianten Hamiltonsysteme. Dann gilt:

$$\mathfrak{P} \mathfrak{L} = \mathfrak{H}^{\text{inv}} \mathfrak{L}$$

3.14.Korollar: Für $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F} \mathfrak{M}$ werde definiert: $\mathfrak{F} \in \mathfrak{F} \mathfrak{L}$ mit

$$\mathfrak{F}(\mathbf{x}) = \mathfrak{s}^2(\mathbf{x}) \cdot \mathfrak{f} \circ \mathfrak{P}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \mathfrak{f} \circ \mathfrak{P}(\mathbf{x})$$

Dann ist $\mathfrak{F}$ die Hamiltonfunktion von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S} \mathfrak{L} \subset \mathfrak{H} \mathfrak{L}$, d.h. es gilt $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \lrcorner \Omega = \mathfrak{d} \mathfrak{F}$. Außerdem sind die Flüsse von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H} \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{d} \mathfrak{F} \in \mathfrak{H} \mathfrak{M}$ $\mathfrak{P}$ -bezogen und $\mathfrak{T}: \mathfrak{F} \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{H}^{\text{equ}} \mathfrak{L} \subset \mathfrak{F} \mathfrak{L}$ ist ein Lie-Algebra-Isomorphismus.

3.15.Bemerkung: a) $\Omega = -d(s^2 \cdot p^* \alpha^c)$ ist keine $\hat{C}$ -invariante Form. Die Form $-d(s \cdot p^* \alpha^c)$ definiert ebenfalls eine symplektische Struktur auf L und ist außerdem $\hat{C}$ -invariant. Für diese Form gelten die Sätze 3.12., 3.13. und 3.14. ebenfalls (man muß nur $\tilde{f} = s \cdot f \cdot \tilde{r}$ definieren).

b) Identifiziert man $\text{Ver} L$ mit $\hat{r}^* L$, so entspricht $\Omega|_{\text{Ver} L \times \text{Ver} L}$ dem Imaginärteil der Hermitestruktur $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf L , bzw. der natürlichen symplektischen Struktur auf $\mathbb{C}$, wenn man die Isomorphie $\text{Ver} L = L \times \mathbb{C}$ berücksichtigt. Aus diesem Grunde erscheint die Wahl von Ω natürlicher als die invariante symplektische Struktur $-d(s \cdot p^* \alpha^c)$. (Man vergleiche mit 4.5.!)

Wegen der Isomorphie von $\text{Ver} L$ und $\hat{r}^* L$ werden von den entsprechenden Strukturen auf L eine komplexe Struktur j^V und eine Hermitestruktur $\langle \cdot, \cdot \rangle^V$ auf $\text{Ver} L$ induziert, wobei der Imaginärteil von $\langle \cdot, \cdot \rangle^V$ mit $\Omega|_{\text{Ver} L \times \text{Ver} L}$ übereinstimmt.

Es existiere nun auf (M, ω) eine fastkomplexe Struktur j . Dann ist (M, j, H) mit $H(v, w) := \omega(jv, w) + i \cdot \omega(v, w)$ eine fast Kählersche Mannigfaltigkeit $(v, w \in TM)$.

Vermittels horizontaler Liftung läßt sich dann $\text{Hor} L$ zu einem (fast) Kählerschen Vektorbündel machen. Definiert man

$$J := j^V + \hat{r}^* j \quad \text{und} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle^V + \hat{r}^* H \quad \text{auf } TL,$$

so wird $(L, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine fast Kählersche Mannigfaltigkeit.

Damit hat man:

3.16.Satz: Sei (M, j, H) eine fast Kählersche Mannigfaltigkeit und (L^c, α^c) ein PQB über (M, ω) mit $\omega = \text{Im}(H)$.

Dann ist das korrespondierende Prinzipal- $\hat{C}$ -Bündel (L, α) in natürlicher Weise ebenfalls eine Kählersche Mannigfaltigkeit.

4. Projektive Hilberträume

In diesem Kapitel wird ein für die Anwendungen in der Physik fundamentales Beispiel eines Präquantenbündels gegeben:

Die Hopf-Faserung eines komplexen Hilbertraumes.

Bezeichnungen: Sei $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein komplexer Hilbertraum. $\hat{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \setminus \{0\}$

$\Omega := \text{Im} \langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine symplektische und $S := \text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$ eine riemannsche Struktur auf $\mathbb{H}$ und es gilt für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{H}$:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = S(\varphi, \psi) + i \Omega(\varphi, \psi) \quad \text{und} \quad \Omega(i\varphi, \psi) = S(\varphi, \psi).$$

D.h. $\mathbb{H}$ ist in natürlicher Weise eine Kählermannigfaltigkeit.

Bezeichne $^\perp$ das orthogonale Komplement bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und für $\varphi \in \hat{\mathbb{H}}$ werde definiert: $\hat{\varphi} := (\mathbb{C} \cdot \varphi)^\perp$ und $\varphi^\perp := (\mathbb{C} \varphi)^\perp$.

Der projektive Hilbertraum wird definiert durch: $\hat{\mathbb{H}} := \hat{\mathbb{H}} / \mathbb{C}^\times$.

$\hat{\mathbb{H}}$ ist eine komplex analytische Mannigfaltigkeit und die Karten von $\hat{\mathbb{H}}$ werden durch die projektive Darstellung gegeben:

$$\text{Für } \varphi_0 \in \hat{\mathbb{H}} \text{ werde definiert: } \phi_{\varphi_0} : (\mathbb{C} \cdot \varphi_0)^\perp \longrightarrow \hat{\mathbb{H}} \setminus (\mathbb{C} \cdot \varphi_0)^\perp, \quad \varphi \longmapsto \mathbb{C} \cdot (\varphi + \varphi_0).$$

Dann ist $\{ (\hat{\mathbb{H}} \setminus (\mathbb{C} \cdot \varphi_0)^\perp, \phi_{\varphi_0}^{-1}) \mid \varphi_0 \in \hat{\mathbb{H}} \}$ ein holomorpher Atlas von $\hat{\mathbb{H}}$.

Der Tangentenraum $T_{\hat{\varphi}} \hat{\mathbb{H}}$ von $\hat{\mathbb{H}}$ in $\hat{\varphi}$ ist gegeben durch:

$$T_{\hat{\varphi}} \hat{\mathbb{H}} = \{\varphi\} \times (\mathbb{C} \cdot \varphi)^\perp \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$$

Sei $\hat{\pi} : \hat{\mathbb{H}} \longrightarrow \hat{\mathbb{H}}$ die natürliche Projektion. Dann ist $(\hat{\mathbb{H}}, \hat{\pi}, \hat{\mathbb{H}})$ ein Prinzipal- $\mathbb{C}^\times$ -Bündel. Man beachte: $T\hat{\mathbb{H}} = \hat{\mathbb{H}} \times \mathbb{H}$.

Auf $(\hat{\mathbb{H}}, \hat{\pi}, \hat{\mathbb{H}})$ wird eine Zusammenhangsform α definiert durch:

$$\alpha(v_\varphi) := \frac{\langle v, \varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle} \quad \text{für } v_\varphi \in T\hat{\mathbb{H}} = \hat{\mathbb{H}} \times \mathbb{H} \quad (\text{d.h. } v_\varphi = (\varphi, v)).$$

Die zugehörige Zerlegung von $T\hat{\mathbb{H}}$ ist dann gegeben durch:

$$T\hat{\mathbb{H}} \cong \hat{\mathbb{H}} \times \mathbb{H} \cong \text{Ver}\hat{\mathbb{H}} \oplus \text{Hor}\hat{\mathbb{H}} \cong \hat{\mathbb{H}} \times \mathbb{C} \oplus \text{Hor}\hat{\mathbb{H}}$$

$$\varphi \longmapsto (\varphi, v) \longmapsto (\text{pr}_{\hat{\varphi}}(v), \text{pr}_{\varphi^\perp}(v)) \longmapsto (\varphi, \frac{\langle v, \varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle}, \text{pr}_{\varphi^\perp}(v))$$

Dabei bezeichnet $\text{pr}_{\mathbb{U}}$ die orthogonale Projektion auf den Unterraum $\mathbb{U}$.

Auf $\dot{H}$ werden folgende Tensoren definiert:

$$\tilde{s}(v_\varphi, w_\varphi) := \frac{S(\text{pr}_{\varphi^\perp}(v), \text{pr}_{\varphi^\perp}(w))}{\langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle} \quad \text{für } v_\varphi, w_\varphi \in \dot{H}$$

$$\tilde{\omega}(v_\varphi, w_\varphi) := \frac{1}{\langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle} \cdot \Omega(\text{pr}_{\varphi^\perp}(v), \text{pr}_{\varphi^\perp}(w))$$

$$\tilde{j}(v_\varphi) := \frac{1}{\langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle} J(v_\varphi) = \frac{1}{\langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle} \cdot iv$$

Dann sind $\tilde{s}, \tilde{\omega}, \tilde{j}$ $\dot{C}$ -invariant. Außerdem sind $\tilde{s}$ und $\tilde{\omega}$ horizontal und $\tilde{j}(\text{Hor}H) \subset \text{Hor}H$. Daher induzieren $\tilde{s}, \tilde{\omega}, \tilde{j}$ eindeutig $\dot{\tau}$ -bezogene Tensoren s, ω, j auf $\hat{H}$ und es gilt die Gleichung: $\omega(j \cdot, \cdot) = s(\cdot, \cdot)$.

4.1. Lemma: Man definiere eine 1-Form β auf $\dot{H}$ durch

$$\beta(v_\varphi) = \frac{\Omega(v, \varphi)}{\langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle}. \quad \text{Dann gilt: } d\beta = -\tilde{\omega}.$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } d\beta &= d\left(\frac{1}{\langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle}\right) \wedge \Omega(\cdot, \varphi) - \frac{1}{\langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle} \\ &= -\frac{1}{\langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle} (\Omega + 2 \cdot \frac{S(\cdot, \varphi) \wedge \Omega(\cdot, \varphi)}{\langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle}) = -\tilde{\omega}_\varphi \\ \text{da } \text{Re} \langle\langle \cdot, \varphi \rangle\rangle \wedge \text{Im} \langle\langle \cdot, \varphi \rangle\rangle &= \frac{1}{2} \langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle \cdot \Omega|_{\varphi^\perp \times \varphi^\perp} \end{aligned}$$

Damit ist also $\tilde{\omega}$ exakt und daher ω geschlossen und man erhält:

4.2. Satz: Sei H ein komplexer Hilbertraum. Dann ist der projektive Raum $\hat{H} := \dot{H}/\dot{C}$ in natürlicher Weise ein Kähler-Mannigfaltigkeit. Insbesondere ist $(\hat{H}, \omega)$ eine symplektische Mannigfaltigkeit.

Sei $H^C := \dot{H}/R^+$ und $p: \dot{H} \rightarrow H^C$ die natürliche Projektion.

Dann ist H^C ein Prinzipal-Torus-Bündel über $\hat{H}$. Definiere $\tau^C: H^C \rightarrow \hat{H}$ durch $\tau^C = \pi|_{H^C}$. Das Bündel $(\dot{H}, p, H^C)$ ist ein Prinzipal- R^+ -Bündel und man kann H^C mit der 1-Sphäre $S^1(H) = \{\varphi \in H \mid \langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle = 1\}$ von H identifizieren.

Die 1-Form β auf $\dot{H}$ aus 4.1. ist R^+ -invariant und horizontal bezüglich $p: \dot{H} \rightarrow H^C$ und definiert daher eindeutig eine 1-Form α^C auf H^C mit $p^*\alpha^C = \beta$.

Durch Differenzieren erhält man schließlich:

4.3.Lemma: α^0 ist eine Zusammenhangsform auf dem Prinzipal-Torus-Bündel $(\mathbb{H}^0, \alpha^0, \hat{\mathbb{H}}, \mathbb{T})$ und es gilt:

$$\alpha = d(\log \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}) + i \cdot p^* \alpha^0$$

4.4.Theorem: Sei $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein komplexer Hilbertraum.

Dann ist $(\mathbb{H}^0, \alpha^0)$ ein Präquantenbündel über dem projektiven Raum $\hat{\mathbb{H}} = \mathbb{H}/\mathbb{C}^*$.

Das Bündel $(\hat{\mathbb{H}}, \hat{\tau}, \hat{\mathbb{H}})$ mit der Zusammenhangsform α ist das zugehörige komplexe PQB.

Beweis: Es bleibt lediglich zu zeigen: $\text{curv } \alpha^0 = -\omega$:

Nach 4.3. ist $\text{curv } \alpha^0 = \text{curv } \alpha$ und nach 4.1. $dp^* \alpha^0 = d\beta = -\tilde{\omega}$.

Somit gilt $\hat{\tau}^* \omega = -p^* d\alpha^0 = -d\alpha$.

Achtung: Das zugehörige Linienbündel $\hat{\mathbb{H}} \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ ist nicht der Hilbertraum $\mathbb{H}$. $\mathbb{H}$ ist überhaupt kein Bündel über $\hat{\mathbb{H}}$!

4.5.Satz: Die nach 3.11. auf dem Totalraum des komplexen PQB $(\hat{\mathbb{H}}, \hat{\tau}, \hat{\mathbb{H}})$ induzierte symplektische Struktur stimmt mit der natürlichen symplektischen Struktur Ω auf $\hat{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ überein.

Beweis: $d(\langle \varphi, \varphi \rangle \cdot p^* \alpha^0) = (d\langle \varphi, \varphi \rangle) \wedge p^* \alpha^0 + \langle \varphi, \varphi \rangle \cdot p^* d\alpha^0$

$$= 2S(\varphi, \cdot) \wedge \frac{\Omega(\cdot, \varphi)}{\langle \varphi, \varphi \rangle} - \langle \varphi, \varphi \rangle \frac{\Omega(\varphi^\perp, \varphi^\perp)}{\langle \varphi, \varphi \rangle} = -\Omega$$

(nach dem gleichen Argument, wie in 4.1.)

4.6.Korollar: Die Kähler Struktur auf $\hat{\mathbb{H}}$ ist durch die Kähler Struktur auf $\mathbb{H}$ nach 3.16. induziert.

4.7.Satz: Sei $X \in \mathfrak{X} \hat{\mathbb{H}}$ ein Vektorfeld, d.h. X ist ein C^∞ -Operator (nicht unbedingt linear) $\hat{\mathbb{H}} \xrightarrow{X} \hat{\mathbb{H}}$.

Dann gilt $X \in \mathcal{P} \hat{\mathbb{H}} = \mathcal{H}^{\text{inv}} \hat{\mathbb{H}}$ genau dann, wenn

1. $X(c \cdot \varphi) = c \cdot X(\varphi)$ für alle $c \in \mathbb{C}, \varphi \in \hat{\mathbb{H}}$ und

2. $\langle X(\varphi), \psi \rangle + \langle \varphi, X(\psi) \rangle = 0$ für alle $\varphi, \psi \in \hat{\mathbb{H}}$, d.h. X ist antisymmetrisch

Beweis von 4.7.: X ist $\dot{C}$ -invariant $\Leftrightarrow c^*X = X$ für alle $c \in \dot{C}$.

$c^*X(\varphi) = Tc^{-1} \circ X \circ c \cdot (\varphi) = c^{-1} \cdot X(c\varphi)$ für alle $\varphi \in \dot{H}$. Das ergibt 1.

Sei $F_t: I_t \times U \rightarrow \dot{H}$ der lokale Fluß von X . Dann ist F_t genau dann

$\dot{C}$ -equivariant, wenn X $\dot{C}$ -invariant ist. F_t ist isometrisch

genau dann wenn $0 = \frac{d}{dt} \langle\langle F_t \varphi, F_t \varphi \rangle\rangle = \langle\langle F_t \varphi, \varphi \rangle\rangle + \langle\langle \varphi, F_t \varphi \rangle\rangle,$

und ein $\dot{C}$ -equivarianter Fluß ist genau dann isometrisch, wenn er symplektisch ist.

Bemerkung: Wegen 4.7.1) läßt sich jedes $\dot{C}$ -invariante C^∞ -Vektorfeld auf $\dot{H}$ zu einem C^∞ -Operator auf $\dot{H}$ fortsetzen mit $X(0) = 0$.

4.8.Bemerkung: Es gilt $\mathcal{N}_1(\dot{H}) = 0$ für $\dim_{\mathbb{R}} \dot{H} \neq 1$.

Daher ist $(\dot{H}^C, \varphi^C)$ in diesem Falle das einzige PQB über $\hat{H}$

und außerdem gilt $\text{Spl}(\hat{H}, \omega) = \text{Spl}^{\dot{H}^C}(\hat{H}, \omega)$. (siehe 3.3. und 3.5.)

5. Quantendynamik

In diesem Kapitel sei skizziert, wie die Dynamik eines quantenmechanischen Systems im Hilbertraum mit Hilfe des Hilbert PQB aus Kapitel 4 beschrieben werden kann.

Für die Grundbegriffe der Quantenmechanik im Hilbertraum sei auf Jauch [12] und auf Varadarajan [25] verwiesen.

Die Grundannahmen lauten:

Ein quantenmechanisches System wird durch einen komplexen Hilbertraum $\mathbb{H}$ beschrieben. Der Verband $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ aller abgeschlossenen Unterräume von $\mathbb{H}$ stellt die Logik des Systems dar. Die Elemente des projektiven Raumes $\hat{\mathbb{H}}$ repräsentieren die reinen Zustände. Observable sind die (möglicherweise unbeschränkten) selbst-adjungierten Operatoren.

Die unitären Operatoren von $\mathbb{H}$ sind die Isomorphismen des Systems.

Um technische Schwierigkeiten zu vermeiden werden wir uns im Folgenden auf stetige Operatoren beschränken. Die Ergebnisse dieses Kapitels lassen sich auch auf unbeschränkte Operatoren ausdehnen. Dazu sei auf die Methoden von Marsden [3], [17], [18] verwiesen.

Bezeichnungen:

$U(\mathbb{H})$:= Die Banach-Lie-Gruppe der unitären Operatoren

$\text{Proj}(\mathbb{H})$:= $U(\mathbb{H})/\mathbb{T}$, die projektive Gruppe

$\mathcal{S}\mathcal{A}(\mathbb{H})$:= Die symmetrischen Operatoren auf $\mathbb{H}$

$i\mathcal{S}\mathcal{A}(\mathbb{H})$:= Die Lie-Algebra der antisymmetrischen Operatoren

$\mathcal{P}_j(\mathbb{H})$:= $i\mathcal{S}\mathcal{A}(\mathbb{H})/\mathbb{R}$ mit $(X \sim Y \Leftrightarrow X - Y = i \cdot \lambda \cdot 1)$.

$i\mathcal{S}\mathcal{A}(\mathbb{H})$ und $\mathcal{P}_j(\mathbb{H})$ sind die Lie-Algebren von $U(\mathbb{H})$ und $\text{Proj}(\mathbb{H})$.

Nach Definition sind die folgenden Sequenzen von Gruppen bzw. Lie-Algebren exakt:

$$0 \longrightarrow \hat{U} \longrightarrow U(\mathbb{H}) \longrightarrow \text{Proj}(\mathbb{H}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow i\mathcal{P}\mathcal{A}(\mathbb{H}) \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{J}(\mathbb{H}) \longrightarrow 0$$

Man beachte: Die Elemente von $\text{Proj}(\mathbb{H})$ lassen sich zu Morphismen und die Elemente von $\mathcal{P}\mathcal{J}(\mathbb{H})$ zu Vektorfeldern auf $\hat{\mathbb{H}}$ faktorisieren.

Für den folgenden Satz siehe Marsden [17]:

5.1.Satz: Sei X ein komplex lineares Vektorfeld auf $\mathbb{H}$ mit komplex linearem Fluß F_t . (d.h. X ist ein $\mathbb{C}$ -linearer Operator)

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist hamiltonsches Vektorfeld

(ii) $X \lrcorner \Omega = dE$ mit $E: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $E(\varphi) = \frac{1}{2} \langle iX\varphi, \varphi \rangle$

(iii) $X \in i\mathcal{P}\mathcal{A}(\mathbb{H})$, d.h. iX ist symmetrisch

(iv) F_t ist symplektisch für alle $t \in \mathbb{R}$

(v) F_t ist unitär für alle $t \in \mathbb{R}$

Beweis: Folgt sofort aus 4.7.

Die Dynamik eines Quantensystems wird durch den (zeitunabhängigen)

Schrödingeroperator $\underline{H} \in \mathcal{P}\mathcal{A}(\mathbb{H})$ bestimmt. Für $\hbar \in \mathbb{R}^+$ ist $X = \underline{H}/i\hbar$

ein komplex lineares hamiltonsches Vektorfeld auf $\mathbb{H}$.

Die Integralkurven von X beschreiben die zeitliche Entwicklung des Systems und genügen der Schrödinger Gleichung:

$$i\hbar \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=0} = -\underline{H}\varphi$$

Sei $(\hat{\mathbb{H}}, \alpha)$ das komplexe PQB über $(\hat{\mathbb{H}}, \omega)$. Dann erhält man mit 4.7.:

5.2.Lemma: $U(\mathbb{H}) \cong \{F \in \text{Preq}(\hat{\mathbb{H}}, \alpha) \mid F \text{ ist additiv}\} \subset \text{Preq}(\hat{\mathbb{H}}, \alpha)$

$i\mathcal{P}\mathcal{A}(\mathbb{H}) \cong \{X \in \mathcal{P}(\hat{\mathbb{H}}) \mid X \text{ ist additiv}\} \subset \mathcal{P}\hat{\mathbb{H}}$

Daher besteht $U(\mathbb{H})$ genau aus den Präquantomorphismen, die abgeschlossene Unterräume wieder in solche überführen, d.h. die außerdem noch Morphismen der Logik $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ sind.

5.3. Korollar: Die folgenden Diagramme von Gruppen bzw. Lie-Algebren sind kommutativ mit exakten Zeilen: ($\dim \mathbb{H} \neq 1$)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{T} & \hookrightarrow & \text{Preq}(\hat{\mathbb{H}}, \alpha) & \longrightarrow & \text{Spl}(\hat{\mathbb{H}}, \omega) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{I} & \hookrightarrow & U(\mathbb{H}) & \longrightarrow & \text{Proj}(\mathbb{H}) \longrightarrow 0 \\
 \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathfrak{D}\hat{\mathbb{H}} & \longrightarrow & \mathcal{H}\hat{\mathbb{H}} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \hookrightarrow & i\mathcal{P}\mathbb{A}(\mathbb{H}) & \longrightarrow & \mathfrak{D}_j(\mathbb{H}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Man beachte, daß nach 4.8. $\text{Spl}^{\hat{\mathbb{H}}}(\hat{\mathbb{H}}, \omega) = \text{Spl}(\hat{\mathbb{H}}, \omega)$ für $\dim \mathbb{H} \neq 1$.

Mit Hilfe der Resultate von Kapitel 3 und 4 erhält man folgenden Korrespondenzen zwischen den Strukturen eines (zeitunabhängigen) klassisch mechanischen Systems und eines quantenmechanischen Systems:

<u>Klassisch</u>	<u>Quantenmechanisch</u>
Phasenraum (M, ω)	Raum der reinen Zustände $(\hat{\mathbb{H}}, \omega)$
Hamiltonsysteme $\mathcal{H}M$	Hamiltonsysteme $\mathcal{H}\hat{\mathbb{H}}$
Logik $\mathfrak{B}(M)$ (Borelmengen auf M)	Logik $\mathcal{L}(\mathbb{H}) \subset \mathfrak{B}(\hat{\mathbb{H}})$
Observable: $\mathcal{T}M$	$i\mathcal{P}\mathbb{A}(\mathbb{H}) \subset \mathfrak{D}\hat{\mathbb{H}} \cong \mathcal{T}\hat{\mathbb{H}}$
Kanonische Transformationen:	
$\text{Spl}(M, \omega) = \text{Spl}(M, \omega) \cap \text{Aut } \mathfrak{B}(M)$	$\text{Proj}(\mathbb{H}) \cong \text{Spl}(\hat{\mathbb{H}}, \omega) \cap \text{Aut } \mathcal{L}(\hat{\mathbb{H}})$
Hamiltonfunktion $f \in \mathcal{T}M$	Erwartungswert $\hat{E}: \hat{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{R}$
	$E(\psi) = \frac{1}{i2\hbar} \frac{\langle\langle H\psi, \psi \rangle\rangle}{\langle\langle \psi, \psi \rangle\rangle}$

Hamiltonsches Vektorfeld X_f

$X_E = \underline{H}/i\hbar$ auf $\hat{H}$

PQB (L, α) über (M, ω)
(falls integral)

Hilbert-PQB $(\hat{H}, \alpha_{\hat{H}})$ über $(\hat{H}, \omega_{\hat{H}})$

Spl.Struktur Ω auf L

$\Omega = \text{Im} \langle \cdot, \cdot \rangle$

P_f

$P_E = X_E = \frac{1}{i\hbar} \underline{H}$ (Schrödinger Op.)

Hamiltonfunktion von P_f :

Hamiltonfunktion von X_E

$$\bar{F} = s^2 \cdot f \circ \tilde{\nu} \quad (3.12.)$$

$$E = \langle \cdot, \cdot \rangle \cdot \hat{E} = \frac{1}{i\hbar} \langle \underline{H} \cdot, \cdot \rangle$$

Zeitentwicklung: F_t Fluß von X_f :

Fluß von X_E

$$\frac{d}{dt} F_t(m) |_0 = X_f(m), \quad m \in M$$

$$\frac{d}{dt} \phi_t(\varphi) |_0 = X_E(\varphi)$$

F_t ist zu einem Fluß $\bar{F}_t$ mit

ϕ_t ist zu einem Fluß $\bar{\phi}_t$ mit

$$\frac{d}{dt} \bar{F}_t(x_m) |_0 = P_f(x_m)$$

$$i\hbar \cdot \frac{d}{dt} \bar{\phi}_t(\varphi) |_0 = i\hbar \cdot X_E(\varphi) = \underline{H} \varphi$$

auf L -bezogen

(Schrödinger Gleichung)
auf $\hat{H}$ $\tilde{\nu}$ -bezogen.

6. Der Präquantisierungsfunktor

Die wichtigste Anwendung der Präquantenbündel besteht im Präquantisierungsverfahren von B. Kostant [13]. Mit Hilfe des in Kapitel 4 eingeführten Hilbert-PQB wird in diesem Kapitel die Präquantisierung als Funktor von Präquantenbündeln eingeführt. Sei $\overline{\mathcal{P}}$ -PQB die Kategorie der Präquantenbündel mit Morphismen wie in 3.4. eingeführt. Nach den Ergebnissen der Kapitel 3 und 2 ist $\overline{\mathcal{P}}$ -PQB äquivalent zur Kategorie $\hat{\mathcal{C}}$ -PQB aller komplexen PQBs und zur Kategorie L -PQB aller Linienbündel mit kovarianter Ableitung ∇ und ∇ -affiner Hermitestruktur und symplektischer Krümmung. Die entsprechenden Unterkategorien aller endlichdimensionalen Bündel sollen mit $\overline{\mathcal{P}}^e$ -PQB, $\hat{\mathcal{C}}^e$ -PQB und L^e -PQB bezeichnet werden.

Seien $L_1^c = (L_1^c, \alpha_1^c) \in \overline{\mathcal{P}}^e$ -PQB und $L_1 = (L_1, \nabla_1^1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ die zugehörigen Linienbündel aus L -PQB^e, $i=1,2$.

Ist $F^c: L_1^c \longrightarrow L_2^c$ PQB-Morphismus und $F: L_1 \longrightarrow L_2$ der zugehörige L -PQB-Morphismus, so ist F

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{F} & L_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \xrightarrow{\hat{F}} & M_2 \end{array}$$

faserweise ein Isomorphismus: $F_m: \mathcal{P}_1^{-1}(m) \longrightarrow \mathcal{P}_2^{-1}(\hat{F}(m))$ ist Iso.

F ist ein PQB-Iso genau dann, wenn die Basisabbildung $\hat{F}$ ein Symplektomorphismus ist.

Daher läßt sich der kontravariante Schnittfunktor einführen:

$\Gamma L = \{s: M \longrightarrow L \mid s \text{ Schnitt}\}$ und

$\Gamma(F) = F^*: \Gamma L_2 \longrightarrow \Gamma L_1$ mit $F^*s(m) := F_m^{-1}(s(\hat{F}(m)))$ für $F: L_1 \longrightarrow L_2$ und $m \in M_1$, $s \in \Gamma L_2$.

Für $(L^c, \alpha^c) \in \text{PQB}^e$ ist $\rho := \omega^{\frac{1}{2} \dim M}$ ein natürliches Spl-invariantes Volumen auf M (das Liouville Maß).

Mit Hilfe dieses Volumens und mit der affinen Hermitestruktur läßt sich auf L -PQB^e der Hilbertraumwertige L^2 -Schnittfunktor einführen:

$$\Gamma^L_L := \{ s \in \Gamma_L \mid \int_M \langle s(m), s(m) \rangle \cdot \mathcal{P}(m) \in \mathbb{R} \} / N := \mathbb{H}(L)$$

$\Gamma^L(F) := F^*|\mathbb{H}(L_2)$ (N ist der Raum aller Schnitte, die außerhalb einer Menge vom Maß Null verschwinden).

für $L = (L, \nabla, \langle, \rangle) \in L\text{-PQB}^e$ über (M, ω) und $F: L_1 \rightarrow L_2$.

6.1.Satz: Seien $(L_1, \nabla^1, \langle, \rangle_1) \in L\text{-PQB}^e$, $i=1,2$ und $F: L_1 \rightarrow L_2$ ein PQB-Morphismus.

Dann ist $F^*: \mathbb{H}(L_2) \rightarrow \mathbb{H}(L_1)$ eine partielle Isometrie, d.h.

$F^*|_{(\text{Ker } F^*)^\perp}: (\text{Ker } F^*)^\perp \rightarrow \mathbb{H}(L_1)$ ist isometrisch.

Beweis: Für das Skalarprodukt in $\mathbb{H}(L_1)$ gilt:

$$\langle F^*s, F^*s \rangle_1 = \int_{M_1} \langle F_m^{-1} \circ s \circ \hat{F}(m), F_m^{-1} \circ s \circ \hat{F}(m) \rangle \cdot \mathcal{P}_1(m) \Rightarrow$$

$$\text{Ker } F^* = \{ s \in \mathbb{H}(L_2) \mid s \circ \hat{F} = 0 \} = \{ s \in \mathbb{H}(L_2) \mid s|_{F(M_1)} = 0 \}$$

$$(\text{Ker } F^*)^\perp = \{ s \in \mathbb{H}(L_2) \mid s|_{M_2 \setminus \hat{F}(M_1)} = 0 \} \quad (\text{bis auf Nullmengen}).$$

Daher $\langle s, s \rangle_2 = \langle F^*s, F^*s \rangle_1$ genau dann, wenn $s \in (\text{Ker } F^*)^\perp$.

6.2.Definition: $K(F): \mathbb{H}(L_1) \rightarrow \mathbb{H}(L_2)$, $K(F) := (F^*|_{(\text{Ker } F^*)^\perp})^{-1}$

$K(F)$ ist eine $\mathbb{C}$ -lineare isometrische Einbettung $\mathbb{H}(L_1) \rightarrow \mathbb{H}(L_2)$

und daher eine symplektische Abbildung. Sei $\dot{K}(F)$ $K(F)$ eingeschränkt auf $\dot{\mathbb{H}}(L_1)$.

Dann induziert $\dot{K}(F)$ eine symplektische Abbildung $\hat{K}(F): \widehat{\mathbb{H}}(L_1) \rightarrow \widehat{\mathbb{H}}(L_2)$ und daher ist

$$\dot{K}(F): (\dot{\mathbb{H}}_1, \dot{\eta}_{\mathbb{H}_1}, \hat{\mathbb{H}}_1) \rightarrow (\dot{\mathbb{H}}_2, \dot{\eta}_{\mathbb{H}_2}, \hat{\mathbb{H}}_2)$$

mit $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}(L_1)$ ein PQB-Morphismus.

Außerdem gilt $\dot{K}(F \circ F') = \dot{K}(F) \circ \dot{K}(F')$ für PQB-Morphismen F und F'

derart, daß die Komposition Sinn hat. Damit ergibt sich:

6.3.Satz: $\dot{K}: L\text{-PQB}^e \rightarrow \dot{\mathbb{C}}\text{-PQB}$ ist ein kovarianter Funktor.

Infolge der Äquivalenz von $L\text{-PQB}$ und $\dot{\mathbb{C}}\text{-PQB}$ ist $\dot{K}$ auch ein

Funktor $\dot{\mathbb{C}}\text{-PQB}^e \rightarrow \dot{\mathbb{C}}\text{-PQB}$.

6.4.Definition: Der Funktor $\hat{K} : \hat{\mathcal{C}}\text{-PQB}^e \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}\text{-PQB}$

heißt der Kostant-Funktor.

Bemerkung: Sind $F_1: L \longrightarrow L', (i=1,2 \text{ und } L, L' \in \mathcal{L}\text{-PQB}^e)$ PQB-Morphismen über derselben Basisabbildung $\hat{F}: M \longrightarrow M'$, so gilt nach 3.4. $F_1 \neq c \cdot F_2$ für ein $c \in \overline{\mathbb{H}}$, und daher $\hat{K}(\hat{F}_1) \neq \hat{K}(\hat{F}_2)$ d.h. die induzierte symplektische Abbildung $\hat{H}(L) \longrightarrow \hat{H}(L')$, hängt nur von der Basisabbildung $\hat{F}$ ab und natürlich von L und L' . Definiere $\hat{K}(\hat{F}) := \hat{K}(\hat{F}_1) = \hat{K}(\hat{F}_2)$.

Da diese Definition von L und L' abhängt ist $\hat{K}$ kein Funktor von symplektischen Mannigfaltigkeiten.

Lediglich im einfach zusammenhängenden Fall erhält man: mit 3.2. und 3.3.:

6.5.Satz: Der Kostant-Funktor $\hat{K}$ induziert einen kovarianten Funktor von der Kategorie der einfach zusammenhängenden endlich-dimensionalen symplektischen Mannigfaltigkeiten (M, ω) mit integrälem ω in die Kategorie der symplektischen Mannigfaltigkeiten durch: $\hat{K}(M, \omega) = \hat{K}(\hat{L})$ und $\hat{K}(\hat{F}) \neq \hat{K}(\hat{F})$, wobei L das eindeutig bestimmte PQB über (M, ω) ist und F ein PQB-Morphismus, der $\hat{F}$ als Basisabbildung hat.

Sei (L, α) ein endlichdimensionales PQB über (M, ω) . Dann ist $\hat{K}: \text{Preq}(L, \alpha) \longrightarrow \text{Preq}(\hat{H}(L), \alpha_{\hat{H}})$ ein Gruppenhomomorphismus.

Der induzierte Lie-Algebra-Morphismus ist die Präquantisierungsabbildung von B.Kostant. Zum Beweis ein Lemma:

6.6.Lemma: Sei (L, α) ein PQB über (M, ω) und $L = (L, \nabla, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ das zugehörige Linienbündel, $q: L \times \mathbb{C} \rightarrow L$ $L \times \mathbb{C} \xrightarrow{q} L$
 die kanonische Projektion und $\downarrow \quad \downarrow$
 $q^*: \Gamma^\infty L \rightarrow \mathcal{T}^{equ}(L, \mathbb{C})$ der induzierte $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 Isomorphismus (siehe [9]). Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{T}M$ und $s \in \Gamma^\infty L$:

$$\mathbb{L}_{P_f} q^* s = q^*(\nabla_{df} s + i\hbar f \cdot s)$$

Beweis: $P_f = G_f + f \circ \hat{\eta} \cdot Z = G_f + i\hbar \cdot f \circ \hat{\eta}$ (nach 2.10.)

$$\mathbb{L}_{(i\hbar \cdot f \circ \hat{\eta})} q^* s = i\hbar \cdot f \circ \hat{\eta} \cdot \mathbb{L}_{\hat{1}} q^* s = i\hbar \cdot f \circ \hat{\eta} \cdot q^* s = q^*(i\hbar \cdot f \cdot s),$$

da $q^* s$ $\hat{\mathbb{C}}$ -equivariant ist.

$$\mathbb{L}_{G_f} q^* s = q^*(\nabla_{df} s) \text{ nach Def. von } \nabla \text{ (siehe [9]) } \quad q.e.d.$$

Sei nun $\Gamma^\infty L$ der Raum aller C^∞ -Schnitte mit kompaktem Träger.

$\Gamma^\infty L$ ist dicht in $\mathcal{H}(L) =: \mathcal{H}$, daher wird durch

$$\mathcal{T}M \cong \mathcal{P}L \longrightarrow \text{End } \Gamma^\infty L, \quad f \longmapsto \nabla_{df} + i\hbar \cdot f$$

eine Abbildung $k: \mathcal{T}M \longrightarrow \text{End}(\mathcal{H})$ definiert.

Ist $i\tilde{\mathcal{P}}\mathcal{A}(\mathcal{H})$ der Raum der möglicherweise unbeschränkten antisymmetrischen Operatoren auf $\mathcal{H}$, so ist $k(f) \in i\tilde{\mathcal{P}}\mathcal{A}(\mathcal{H})$, da die Hermitestruktur $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf L ∇ -affin ist.

Außerdem gilt nach 6.6. und 1.20.: $k(\{f, g\}) = [k(f), k(g)]$ (Kommutator).

Insgesamt:

6.7.Satz: $k: \mathcal{T}M \longrightarrow i\tilde{\mathcal{P}}\mathcal{A}(\mathcal{H}), \quad f \longmapsto \nabla_{df} + i\hbar \cdot f$

ist ein Lie-Algebra-Morphismus, die Infinitesimaloperation von $K: \text{Preq}(L, \alpha) \longrightarrow \text{Preq}(\mathcal{H})$.

Insbesondere ist $k(f) \in \mathcal{T}\hat{\mathcal{H}}$, wenn $k(f)$ beschränkt ist.

k heißt die Präquantisierungsabbildung von Kostant.

6.8.Bemerkung: Die Präquantisierungsabbildung k läßt sich auf verschiedene Weisen interpretieren:

a) Als der von $K: \text{Preq}(\dot{L}, \alpha) \longrightarrow \text{Preq}(\dot{H}, \omega_H)$ induzierte Lie-Algebren-Homomorphismus.

Definiert man $\tilde{\mathcal{H}}$ als Modul der möglicherweise unbeschränkten Infinitesimalmorphisme von $\dot{H}$ (unbeschränkte Vektorfelder im Sinne von Marsden [17]), so besteht $i\tilde{\mathcal{H}}(\dot{H})$ aus allen additiven Elementen von $\tilde{\mathcal{H}}$ (vgl. 5.2.) und

$$\mathcal{F}M \cong \mathcal{G}L \xrightarrow{f \mapsto \beta \mapsto k(f)} i\tilde{\mathcal{H}}(\dot{H}) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{H}} \dots$$

b) k transportiert hamiltonsche Systeme von L auf $\dot{H}$:

Die Gleichung $P_f(c(t_0)) = \frac{d}{dt}c(t)|_{t_0}$ für eine Kurve c in L (die zu einer Hamiltongleichung auf M $\tilde{\omega}$ -bezogen ist) wird in eine Prä Schrödingergleichung auf $\dot{H}$

$$-k(f)\varphi_{t_0} = \frac{d}{dt}\varphi_t|_{t_0}$$

mit zeitunabhängigem Prä Schrödingeroperator $k(f)$.

c) $k(f): \Gamma^\infty L \longrightarrow \Gamma^\infty L$ ist ein Differentialoperator 1.Ordnung.

$$\text{Symbol: } \sigma(k(f)): T^*M \otimes L \longrightarrow L, (\alpha_m, s(m)) \longmapsto df^\# \lrcorner \alpha_m \cdot s(m) + f(m) \cdot s(m)$$

d) Schließlich läßt sich k selbst als Differentialoperator (linear) 1.Ordnung auffassen: $M_{\mathbb{R}} := M \times \mathbb{R}$ (als Bündel über M)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^\infty L \otimes_{M_{\mathbb{R}}} & \xrightarrow{\quad} & \Gamma^\infty L \\ & \searrow & \nearrow \\ & \Gamma^\infty J^1(L \otimes_{M_{\mathbb{R}}}) & \end{array} \quad k(sf) = k(f) \cdot s$$

7. Präquantisierung und klassische Statistik

In diesem Kapitel soll kurz erläutert werden, welche Beziehungen zwischen Präquantisierung und klassischer Statistik bestehen. Man kann nämlich die Elemente des projektiven präquantisierenden Hilbertraumes $\hat{H}$ - die 'reinen Präquantenzustände' - in natürlicher Weise auf die klassischen Wahrscheinlichkeitsdichten so abbilden, daß diese Abbildung mit der Dynamik verträglich ist. D.h. grob gesprochen: Die Dynamik der klassischen Statistik läßt sich als Spezialfall der Präquantendynamik interpretieren. Dieses Kapitel soll nur der Interpretation dienen und bleibt daher z.T.phänomenologisch.

Sei im Folgenden stets (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und (L^C, α^0) ein PQB über (M, ω) und $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ der zugehörige präquantisierende Hilbertraum von L^2 -Schnitten in $(L, \nabla, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

mit $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M \langle \varphi, \psi \rangle \omega^n$, $n = \frac{1}{2} \dim M$.

I. Der Raum $\mathcal{W}^M$ aller Wahrscheinlichkeitsdichten auf M .

Sei $\mathcal{W}^M := \{ \rho: M \rightarrow \mathbb{R} \mid \rho(m) \geq 0 \text{ für alle } m \in M \text{ und } \int_M \rho \omega^n = 1 \}$
 $\mathcal{W}^\infty M := \{ \rho \in \mathcal{W}^M \mid \rho \text{ ist } C^\infty\text{-Abbildung} \}$

$\mathcal{W}^M$ ist Kegelbasis im Kegel aller positiven Funktionen aus $L^1(M, \omega^n)$. Da dieser Kegel jedoch keine offenen Mengen von $L^1(M)$ enthält ist $\mathcal{W}^M$ auch keine Untermannigfaltigkeit von $L^1(M)$.

Im Folgenden wird angenommen, daß es einen Schnittfunktork (vgl.[5]) gibt, der $\mathcal{W}^M$ zu einer differenzierbaren (nicht notwendigerweise Banach-) Mannigfaltigkeit macht. Insbesondere soll also $\mathcal{W}^\infty M$ dicht in $\mathcal{W}^M$ liegen. Außerdem beachte man, daß $\mathcal{W}^M$

in jedem Falle nach einem Unterraum von

$$\mathcal{W}^M := \{ \rho \in L^1 M \mid \int_M \rho \cdot \omega^n = 0 \} \subset L^1 M \quad (\text{Hyperebene})$$

modelliert ist.

II. Dynamik der klassischen Statistik

Im Folgenden seien als statistische klassische Zustände nur die Elemente von $\mathcal{WM}$ betrachtet.

$\text{Spl}(\mathbf{M}, \omega)$ operiert auf $\mathcal{WM}$ in natürlicher Weise:

$$\text{Spl}(\mathbf{M}, \omega) \longrightarrow \text{Diff}(\mathcal{WM}), F \longmapsto (\rho \longmapsto F^* \rho = \rho \circ F)$$

Die dazugehörige Infinitesimaloperation ist dann auf folgende Weise gegeben: Sei $f \in \mathcal{FM}$ Hamiltonfunktion und X_f das zugehörige hamiltonsche Vektorfeld mit lokalem Fluß F_t . Dann ist die Abbildung $(\rho, t) \longmapsto \rho_t := F_t^* \rho = \rho \circ F_t$ ein Fluß in $\mathcal{WM}$.

Es gilt der

Satz: $\frac{d}{dt} \rho_t|_0 = -\{\rho, f\}$ (Liouville-Gleichung)
für alle $\rho \in \mathcal{WM}$.

Beweis: $\{\rho, f\} = d\rho^* \lrcorner df^* \lrcorner \omega = -\mathbb{L}_{X_f} \omega = -\frac{d}{dt} \rho_t$.

Außerdem gilt das Theorem von Liouville:

Lemma: Für jedes $f \in \mathcal{FM}$ und $\rho \in \mathcal{WM}$ gilt $\int_{\mathbf{M}} \{\rho, f\} \omega = 0$

Beweis: $\int_{\mathbf{M}} \{\rho, f\} \omega = \int_{\mathbf{M}} -\mathbb{L}_{X_f} \rho \cdot \omega = \frac{d}{dt} 1 = 0$

Damit läßt sich also $\{\rho, f\}$ auch tatsächlich als Tangentenvektor vorinterpretieren und man erhält:

Folgerung: Die Abbildung $\mathcal{WM} \longrightarrow T\mathcal{WM} \cong \mathcal{WM} \times \bar{\mathcal{W}} \quad (\bar{\mathcal{W}} \subset \mathcal{W})$
 $\rho \longmapsto \{\rho, f\}$

ist ein Vektorfeld in $\mathcal{WM}$, das den von X_f induzierten Fluß auf $\mathcal{WM}$ erzeugt. Darüberhinaus ist die Abbildung $X_f \mapsto \{-, f\}$ in diesem formalen Sinne die Infinitesimaloperation von $\mathcal{FM}$ auf $\mathcal{WM}$.

III. Beziehung zur Präquantisierung

Sei $(L, \nabla, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ PQB über (M, ω) und $H = \Gamma^{\mathbb{R}}_L$ der präquantisierende Hilbertraum. Man betrachte die Abbildung

$$p: \dot{H} \longrightarrow \mathcal{W}M, \quad p(\varphi) = \frac{\langle \varphi, \varphi \rangle}{\langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle}$$

p läßt sich über $\hat{H}$ faktorisieren $p = \hat{p} \circ \hat{\pi}$ und unter geeigneten Voraussetzungen über die Topologie in $\mathcal{W}M$ erhält man eine Faserung $\dot{H} \xrightarrow{\hat{\pi}} \hat{H} \xrightarrow{\hat{p}} \mathcal{W}M$. Für $f \in \mathfrak{F}M$ gilt:

Satz: Die Operatoren ∇_{df}^* auf $\dot{H}$ und $-\{\cdot, f\}$ auf $\mathcal{W}M$ sind $\hat{p} \circ \hat{\pi}$ -bezogen.

Beweis: Folgt sofort aus II. und aus $q^* \nabla_{df}^* = \mathbb{L}_{df}^* q^*$, $L^* \mathbb{C} \xrightarrow{q} L$.

Lemma: Die Multiplikationsoperatoren $\varphi \mapsto if \cdot \varphi$; $f \in \mathfrak{F}M$ in $\dot{H}$ sind bezüglich der Faserung $\dot{H} \rightarrow \mathcal{W}M$ vertikal.

Beweis: if hat den Fluß $(t, \varphi) \mapsto e^{ift} \varphi$ und $\langle e^{ift} \varphi, e^{ift} \varphi \rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle$.

Bemerkung: Man sieht leicht, daß die vertikalen Operatoren bzgl. p genau die Multiplikationsoperatoren sind, da die Fasern von $(H, p, \mathcal{W}M)$ aus der Phasengruppe $\{e^{if} \mid f \in \mathfrak{F}M\}$ bestehen.

Satz: Die Operatoren $k(f) = \nabla_{df}^* + if$ und $-\{\cdot, f\}$ sind für jedes $f \in \mathfrak{F}M$ p -bezogen.

Damit sind aber auch die Flüsse p -bezogen und das heißt: Die Lösungen der Liouville-Gleichung ergeben sich durch die Projektion p aus den Lösungen der Prä Schrödingergleichung 6.8.b).

Schließlich ergibt das $\frac{1}{1}$ -fache des Vertikalteiles von $k(f)$ durch

$$\langle\langle f\varphi, \varphi \rangle\rangle = \int_M f \cdot \langle \varphi, \varphi \rangle \cdot \omega^n \quad \text{den Erwartungswert von } p(\varphi),$$

d.h. interpretiert man $\dot{H}$ als den Koopmanraum so ist der vertikale Anteil von $\frac{1}{1} \cdot k(f)$ gerade der Koopmanoperator der Observablen f auf M .

8. Präquantisierung präsymplektischer Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel soll das in 6. dargestellte Präquantisierungsverfahren von B. Kostant auf präsymplektische Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden. Eine derartige Verallgemeinerung erweist sich als notwendig, um die Präquantisierung auch auf zeitabhängige und relativistische Teilchensysteme ausdehnen zu können.

Infolge dieser erheblichen Abschwächung der Struktur auf der Basis M lassen sich nicht mehr alle Ergebnisse, besonders einige aus Kapitel 3, aufrechterhalten. Außerdem ergeben sich bei der Konstruktion des präquantisierenden Hilbertraumes topologische Schwierigkeiten, da auf der Basismannigfaltigkeit kein natürliches Maß mehr vorhanden ist.

8.1. Definition: Sei (M, ω) eine präsymplektische Mannigfaltigkeit. Ein Prinzipal-Torus-Bündel (L^C, α^C, M) über M mit Zusammenhangsform α^C heißt (präsymplektisches) Präquantenbündel über (M, ω) wenn, gilt:

$$\omega = -\text{curv } \alpha^C$$

Bemerkung: Auf Grund der Ergebnisse von Kapitel 2 besteht Äquivalenz zwischen den folgenden Objekten über M mit Krümmung $-\omega$:

- (i) Prinzipal-Torus-Bündel mit Zusammenhang (L^C, α^C)
- (ii) Prinzipal- $\mathbb{C}^*$ -Bündel mit Zusammenhang (L, α) , ass. zu ..
- (iii) Linienbündel $(L, \nabla, \langle, \rangle)$ mit kovarianter Ableitung und ∇ -affiner Hermitestruktur .

Bei Bedarf wird eines dieser äquivalenten Objekte als PQB über (M, ω) betrachtet.

Da die Klassifizierung der PQBs von B.Kostant [13] auch für präsymplektische Formen gilt, bleibt Satz 3.3. auch für den präsymplektischen Fall wörtlich erhalten.

Bezeichnungen: Analog zu Kapitel 3 werde definiert:

$$\mathcal{P}L^c := \{ X \in \mathcal{X}L^c \mid X \text{ } \mathbb{T}\text{-invariant und } \mathbb{L}_X \alpha^c = 0 \}$$

$\mathcal{P}L$ und $\mathcal{P}L$ seien entsprechend die eindeutig durch Fortsetzung auf L und L von Elementen aus $\mathcal{P}L^c$ gewonnenen isometrischen Vektorfelder.

Für $X \in \mathcal{X}M$ bezeichne stets $\tilde{X}$ die eindeutige invariante horizontale Liftung von X auf L^c bzw. L oder L .

e sei die Einheit von $\mathbb{T}$ und Z das Fundamentalvektorfeld auf L .

8.2.Lemma: Sei (L^c, α^c) ein PQB über (M, ω) . Definiere:

$$\tilde{\mathcal{E}}L^c := \{ \tilde{X} \in \mathcal{X}_{\text{hor}}^{\text{inv}} L^c \mid X \in \mathcal{E}M \}$$

Dann ist $\tilde{\mathcal{E}}L^c$ ein Lie-Ideal in $\mathcal{P}L^c$.

Beweis: Sei $X \in \mathcal{E}M$, $Y \in \mathcal{P}L^c$. Dann ist $Y = Y_h + Y_v \in \mathcal{X}_{\text{hor}}^{\text{inv}} L^c \oplus \mathcal{X}_{\text{ver}}^{\text{inv}} L^c$ und daher $Y_h = \tilde{V}$ mit $V \in \mathcal{X}M$.

Da aber $\pi^{c*} \mathbb{L}_Y \omega = \mathbb{L}_{\tilde{Y}} \pi^{c*} \omega = -\mathbb{L}_Y d\alpha^c = 0$, folgt $V \in \mathcal{H}M$.

Außerdem ist $[\tilde{X}, Y_v] = 0$. Damit ergibt sich

$$[\tilde{X}, Y] = [\tilde{X}, Y_h] = [\tilde{X}, \tilde{V}] = [X, V]^{\sim} + X \cdot V \lrcorner \omega = [X, V]^{\sim}$$

Da $V \in \mathcal{H}M$ folgt die Behauptung mit 1.7.3.

Bezeichnungen: $\mathcal{Q}L^c := \mathcal{P}L^c / \tilde{\mathcal{E}}L^c$. Sei $f \in \mathcal{F}hM$

$$\mathcal{G}_f := \tilde{\mathcal{G}}_f := \{ \tilde{X} \in \mathcal{X}_{\text{hor}}^{\text{inv}} L^c \mid X \in \mathcal{G}_f \} \quad (\text{siehe 1.8.2.})$$

$\mathcal{G}_f$ ist die horizontale invariante Liftung der von f erzeugten hamiltonschen Klasse auf M .

8.3.Bemerkung: Sei (L^c, α^c) ein PQB über (M, ω) und $\dim \text{Ker } \omega = k$, d.h. (M, ω) hat die Charakteristik k .

Dann läßt sich das zugehörige Prinzipal- $\mathbb{C}$ -Bündel $\tilde{L}$ auf ähnliche

Weise wie in 3.11. zu einer präsymplektischen Mannigfaltigkeit der Charakteristik k machen. Die Elemente von $\mathfrak{L}$ sind dann gerade die von dieser präsymplektischen Struktur auf L erzeugten invarianten hamiltonschen Klassen: $\mathfrak{L} = \mathcal{H}^{\text{inv}} L$.

8.4.Theorem: Sei (L^c, α^c) ein PQB über (M, ω) .

Dann ist die Abbildung

$$P: \mathfrak{H}M \longrightarrow \mathfrak{L}^c, f \longmapsto \mathbb{G}_f + f \cdot \hat{e}$$

ein Lie-Algebren-Isomorphismus. Außerdem ist das folgende Diagramm kommutativ mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{R} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \mathfrak{L}^c & \begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array} & \mathfrak{H}M \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow P & & \\ & & & & \mathfrak{H}M & & \end{array}$$

Beweis: Für $x \in L^c$ zerlege man: $T_x L^c = \text{Hor}_x L^c \oplus \text{Ver}_x L^c$ und $\text{Hor}_x L^c = B_x L^c \oplus C_x L^c$ wobei $C_x L^c$ alle zu Elementen von $C_{\pi(x)} M$ α^c -bezogenen Vektoren sind und $B_x L^c$ durch die Wahl eines Komplementärbündels auf M (siehe 8, 1.22. bis 1.31) gegeben ist. Dann ist $B_x L^c$ symplektischer Vektorraum und die Rechnung von 1.20. läßt sich wörtlich auf $\text{Ver} L^c \oplus B L^c$ übertragen und durch Faktorisieren nach den 'Nullräumen' CL^c folgt die Behauptung. Die Exaktheit der oberen Sequenz sieht man mit den gleichen Argumenten auf Grund der Konstruktion ein.

Als Nächstes sollen die zu diesen Lie-Algebren gehörigen Morphismengruppen eingeführt werden:

8.5.Definition: Sei (L^c, α^c) ein PQB über (M, ω) .

$$\text{Preq}(L^c, \alpha^c) := \{ F: L^c \rightarrow L^c \mid F \text{ Prinzipal-Iso und } F^* \alpha^c = \alpha^c \}$$

$$\text{Preq}^0(L^c, \alpha^c) := \{ F \in \text{Preq}(L^c, \alpha^c) \mid \hat{F} \in \text{Präs}^0(M, \omega) \}$$

$$\text{Präs}^L(M, \omega) := \{ \hat{F} \in \text{Präs}(M, \omega) \mid F \in \text{Preq}(L^c, \alpha^c) \}$$

$$\text{Präs}^{L,0}(M, \omega) := \text{Präs}^L(M, \omega) \cap \text{Präs}^0(M, \omega)$$

$$\begin{array}{ccc} L^c & \xrightarrow{F} & L^c \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\hat{F}} & M \end{array}$$

(vgl. 1.13.)

8.6.Folgerung: Aus 8.3. und 8.5. ergibt sich:

$\mathcal{P}L^C$ ist formal die Lie-Algebra von $\text{Preq}(L^C, \alpha^C)$

$\mathcal{E}L^C$ ist formal die Lie-Algebra von $\text{Preq}^0(L^C, \alpha^C)/\sqrt{\mathbb{H}}$

Definiert man noch: $\text{Preq}(L^C, \alpha^C) := \text{Preq}(L^C, \alpha^C)/(\text{Preq}^0(L^C, \alpha^C)/\sqrt{\mathbb{H}})$

($\text{Preq}^0(L^C, \alpha^C)$ ist Normalteiler von $\text{Preq}(L^C, \alpha^C)$) so folgt:

$\mathcal{Q}L^C$ ist formal die Lie-Algebra von $\text{Preq}(L^C, \alpha^C)$.

Die gleichen Aussagen ergeben sich natürlich für L und L .

Ebenso wie in 3.4. werden auch allgemeine Morphismen von Präquantenbündeln definiert.

Sei nun (L^C, α^C) ein PQB über (M, ω) und $(L, \nabla, \langle, \rangle)$ das zugehörige Linienbündel mit kovarianter Ableitung ∇ und ∇ -affiner

Hermitestruktur $\langle, \rangle$. Da die Morphismen von Präquantenbündeln faserweise Isomorphismen sind, existiert der kontravariante

Schnittfunktor von den Präquantenbündeln in die $\mathbb{R}$ -Vektorräume

(siehe Kapitel 6): $\Gamma^\infty L := \{s: M \rightarrow L \mid s \text{ Schnitt}\}$ und

$\Gamma^\infty(F) := F^*: \Gamma^\infty L_2 \rightarrow \Gamma^\infty L_1$ mit $F^*s(\underline{m}) = F_{\underline{m}}^{-1}(s(F(\underline{m})))$

für $F: L_1 \rightarrow L_2$, $m \in M_1$, $s \in \Gamma^\infty L_2$.

Im Gegensatz zum symplektischen Fall gibt es aber auf M kein Prä-invariantes Volumen, das es erlaubt, den Hilbertraumwertigen L^2 -Funktorkonstruieren. Aus diesem Grunde muß die folgende Konstruktion auf Präquantenmorphismen beschränkt bleiben.

8.7.Definition: Sei PQB^{iso} die Kategorie PQB über den präsymplektischen Mannigfaltigkeiten. Dann läßt sich auf PQB^{iso} der kovariante Schnittfunktor definieren: $K(L) := \Gamma^\infty L$ und $K(F) := (F^*)^{-1}$. Insbesondere erhält man einen Gruppenmorphismus

$$K: \text{Preq}(L, \alpha) \longrightarrow \text{Aut } \Gamma^\infty L, \quad F \longmapsto (F^*)^{-1}$$

8.8. Definition: $\underline{K}(L) := \varprojlim L := \{s \in \varprojlim L \mid \nabla_X s = 0 \text{ für alle } X \in \mathcal{C}M\}$.

D.h. $\underline{K}(L)$ besteht aus allen Schnitten in L , die kovariant konstant längs der charakteristischen Fasern von M sind.

8.9. Folgerung: a) $\underline{K}(L)$ ist $\mathcal{F}hM$ Untermodul von $K(L)$.

b) $\underline{K}(L)$ ist stabil unter der Operation von $\text{Präs}(M, \omega)$ und $\text{Preq}(L, \alpha)$.

c) $\text{Präs}^0(M, \omega)$ und $\text{Preq}^0(L, \alpha) / \mathbb{H}$ operieren trivial auf $\underline{K}(L)$

$\text{Preq}^0(L, \alpha)$ operiert trivial auf $\underline{K}(L) / \mathbb{H}$.

Beweis: a) $\nabla_X f \cdot s = X \cdot df + \nabla_X s = 0$ für $X \in \mathcal{C}M$ und $f \in \mathcal{F}hM$, $s \in \underline{K}(L)$.

b) Da jedes $\hat{F} \in \text{Präs}(M, \omega)$ die charakteristische Faserung erhält und jedes $F \in \text{Preq}(L, \alpha)$ den Zusammenhang erhält folgt stets

$$\nabla_X F^* s = \nabla_{F_* X} s = 0 \text{ für } X \in \mathcal{C}M \text{ und } s \in \underline{K}(L)$$

c) ergibt sich aus dem folgenden zu 3.6. analogen Theorem:

8.10. Theorem: Sei (L^0, α^0) ein PQB über (M, ω) . Dann sind die folgenden Sequenzen von Gruppen exakt und zentral:

$$0 \longrightarrow \mathbb{H} \longrightarrow \text{Preq}(L^0, \alpha^0) \longrightarrow \text{Präs}(M, \omega) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{H} \longrightarrow \text{Preq}^0(L^0, \alpha^0) \longrightarrow \text{Präs}^0(M, \omega) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{H} \longrightarrow \text{Preq}(L^0, \alpha^0) \longrightarrow \text{Präs}(M, \omega) \longrightarrow 0$$

8.11. Folgerung: Es wird eine Operation $\underline{K}$

$$\underline{K}: \text{Preq}(L, \alpha) \longrightarrow \text{Aut } \underline{K}(L) = \text{Aut}(\varprojlim L)$$

induziert.

Ebenso wie K ist auch $\underline{K}$ ein kovarianter Funktor.

Als nächstes soll die infinitesimale Version dieses Sachverhaltes untersucht werden.

8.12. Definition: Sei (L, α) PQB über (M, ω) und $f \in \mathcal{F}hM$, $X \in \mathcal{G}_F$.

$$k(f)_X: \mathcal{C}M \longrightarrow \text{End } K(L), \quad k(f)_X \cdot Y := (\nabla_{X+Y} + i\hbar \cdot f) \in \text{End}(K(L))$$

$$k(f) := \{ \nabla_X + i\hbar \cdot f \mid X \in \mathcal{G}_F \} \subset \text{End } K(L)$$

Bemerkung: $k(f)$ ist als eine $\mathcal{F}hM$ -Parameterschar von Operatoren in $K(L)$ aufzufassen. Da jedes Element von G_f die Form $X + \mathcal{C}M$ für ein $X \in G_f$ hat, stimmen alle Operatoren aus $k(f)$ auf $\underline{K}(L)$ überein. Darüberhinaus ist $\underline{K}(L)$ der größte Unterraum von $K(L)$, auf dem für jedes $f \in \mathcal{F}hM$ die Elemente von $k(f)$ übereinstimmen. Mit dem Kommutator sind $\underline{K}(L)$ und $K(L)$ in natürlicher Weise Lie-Algebren und damit hat man als Verallgemeinerung der Präquantisierungsabbildung:

8.13.Theorem: Für jedes $f \in \mathcal{F}hM$ induziert $k(f)$ eindeutig einen Operator $\underline{k}(f)$ auf $\underline{K}(L)$ durch Einschränkung. Die Abbildung

$$k: \mathcal{F}hM \longrightarrow \text{End } \underline{K}(L), f \mapsto \underline{k}(f)$$

ist ein Lie-Algebren-Morphismus, die Präquantisierungsabbildung. $\underline{k}$ ist die Infinitesimaloperation von $\underline{K}$.

Bemerkung: Da auf M kein natürliches Prä-s-invariantes Maß existiert, läßt sich auch nicht sagen, daß $\underline{k}(f)$ ein antisymmetrischer Operator ist, denn $\langle \underline{k}(f)\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \underline{k}(f)\psi \rangle + L_X \langle \varphi, \psi \rangle$ für ein $X \in G_f$.

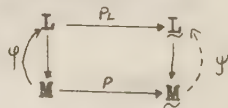
Im Falle, daß jedoch (M, ω) regulär ist, läßt sich das u.U. durch Quotientenbildung erreichen. Das soll jetzt untersucht werden:

8.14.Definition: Sei (M, ω) präsymplektisch und regulär (vgl. 1.4.).

$\underline{M} := M/CM$, $p: M \rightarrow \underline{M}$ die kanonische Projektion.

$\underline{L}$ sei ein Vektorbündel über $\underline{M}$ und $L := p^* \underline{L}$ das induzierte Bündel über M mit der induzierten

Projektion $p_L: L \rightarrow \underline{L}$. $\varphi \in \Gamma L$.



φ heißt liftbar, wenn es ein $\varphi \in \Gamma \underline{L}$ gibt mit $p_L \circ \varphi = \varphi \circ p$.

Bemerkung: Natürlich ist der Ring $\mathcal{F}hM$ isomorph zum Ring $\mathcal{F}\underline{M}$ und der $\mathcal{F}\underline{M}$ -Modul der Schnitte in $\underline{L}$ ist isomorph zum $\mathcal{F}hM$ Modul der liftbaren Schnitte in L .

8.15.Lemma: φ ist genau dann liftbar, wenn gilt

$$T(p_L \circ \varphi)(CM) = 0, \text{ d.h. } CM = \text{Ker}(Tp_L \circ T\varphi).$$

Beweis: Sei φ liftbar $\Rightarrow p_L \circ \varphi = \gamma \circ p \Rightarrow T(p_L \circ \varphi) = T\gamma \circ Tp \Rightarrow$

$$\text{Ker}(Tp_L \circ T\varphi) = \text{Ker}T\gamma \circ Tp = \text{Ker}Tp = CM, \text{ da } \gamma \text{ Immersion ist.}$$

Wegen $\frac{d}{dt}(p_L \circ \varphi \circ c(t)) = Tp_L \circ T\varphi \circ \dot{c}(t)$ für jede Kurve c , ist

$T(p_L \circ \varphi)(CM) = 0$ genau dann, wenn $p_L \circ \varphi$ auf den charakteristischen Fasern konstant ist. In diesem Fall läßt sich also definieren:

$\gamma(p(m)) := p_L \circ \varphi(m)$ für alle $m \in M$. γ ist wohldefiniert und leistet das Gewünschte.

8.16.Lemma: Sei ∇ kovariante Ableitung auf L und $\tilde{\nabla}$ auf $\tilde{L}$ derart, daß ∇ und $\tilde{\nabla}$ p_L -bezogen sind, d.h. $(Tp_L(\text{Hor}L) = \text{Hor}\tilde{L})$ oder auch $p_L^* \tilde{\alpha} = \alpha^c$ auf dem zugehörigen $\mathcal{T}$ -Bündeln). Dann gilt:

$\varphi \in \Gamma^\infty L$ ist genau dann liftbar, wenn $\nabla_X \varphi = 0$ für alle $X \in \mathcal{CM}$, d.h. wenn φ auf den charakteristischen Fasern kovariant konstant ist

Beweis: Seien C und $\tilde{C}$ die Zusammenhangsabbildungen von ∇ und $\tilde{\nabla}$.

Dann ist stets $\nabla_X \varphi = C \circ T\varphi \circ X$. Damit ist $\nabla_X \varphi = 0$ genau dann, wenn $X \in \text{Ker}(C \circ Tp_L \circ T\varphi)$, da wegen $\tilde{C} = C \circ Tp_L$ $\nabla_X \varphi = \tilde{C} \circ Tp_L \circ T\varphi \circ X$.

Also genau dann, wenn $Tp_L \circ T\varphi \circ X(m) \in \text{Hor}_{\tilde{L}} \Leftrightarrow Tp_L \circ T\varphi \circ X_m = 0 \quad (m \in M),$
da wegen $X \in \mathcal{CM}$ $Tp_L \circ T\varphi \circ X(m)$ nur zu $0 \tilde{\nabla}^c$ -bezogen sein kann.

8.17.Folgerung: Sei (L, α) PQB über (M, ω) und (M, ω) regulär.

Es gebe ein PQB $(\tilde{L}, \tilde{\alpha})$ über $\tilde{M}$ derart, daß die Zusammenhänge von L und $\tilde{L}$ p_L -bezogen sind.

Dann besteht $\tilde{K}(L)$ genau aus den liftbaren Schnitten in L , also

$$\tilde{\Gamma}^\infty L = \tilde{K}(L) = K(\tilde{L}) = \Gamma^\infty \tilde{L}$$

Bemerkung: Es ist nicht immer zu erwarten, daß die Voraussetzungen dieser Folgerung erfüllt sind. I.A. wird es mehr PQBs über M als über $\tilde{M}$ geben.

Geht man jedoch von einem PQB über $\underline{M}$ aus, so erhält man:

8.18.Theorem: Sei $(\underline{M}, \omega)$ präsymplektisch und regulär.

$(\underline{M}, \omega)$ sei der symplektische Quotient, $p: \underline{M} \rightarrow \underline{M}$ die Projektion.

Ferner sei $(\underline{L}^C, \alpha^C)$ ein PQB über $(\underline{M}, \omega)$.

Definiere $L^C := p^* \underline{L}^C$, $p_L: L^C \rightarrow \underline{L}^C$ die induzierte Projektion und $\alpha^C := p_L^* \alpha^C$. Dann gilt:

$$\begin{array}{ccc} L^C & \xrightarrow{p_L} & \underline{L}^C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{M} & \xrightarrow{p} & \underline{M} \end{array}$$

a) (L^C, α^C) ist ein PQB über $(\underline{M}, \omega)$

b) $\Gamma^\infty L = \Gamma^\infty \underline{L}$, insbesondere läßt sich also aus $\Gamma^\infty L$ ein Hilbertraum machen.

c) $\text{Preq}(L^C, \alpha^C) \cong \text{Preq}(\underline{L}^C, \alpha^C)$ und ist $\underline{K}$ der Präquantisierungsfunktor auf $\underline{M}$, so

$$\begin{array}{ccc} \text{Preq}(L^C, \alpha^C) & \xrightarrow{\cong} & \text{Preq}(\underline{L}^C, \alpha^C) \\ \downarrow \underline{K} & & \downarrow \underline{K} \\ \Gamma^\infty L & \xrightarrow{\cong} & \Gamma^\infty \underline{L} \end{array}$$

stimmen $\underline{K}$ und $\underline{K}$ mit diesen Isomorphismen überein (Diagramm).

d) $\mathcal{T}\underline{M} \cong \mathcal{T}h\underline{M}$ sowie $\mathcal{O}\underline{L} \cong \mathcal{O}L$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}h\underline{M} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{T}\underline{M} \\ \downarrow \underline{k} & & \downarrow \underline{k} \\ \text{End } \Gamma^\infty L & \xrightarrow{\cong} & \text{End } \Gamma^\infty \underline{L} \end{array}$$

und ist $\underline{k}$ die Präquantisierungsabbildung auf $\underline{M}$, so stimmen $\underline{k}$ und $\underline{k}$

vermittels dieser Isomorphismen ebenfalls überein (Diagramm).

Beweis: Nach dem vorhergehenden ist lediglich d) zu zeigen.

Beachtet man jedoch, daß $\underline{k}$ (im Sinne von 6.6.) Infinitesimaloperation von $\underline{K}$ ist, so folgt die Behauptung sofort aus c)

8.19.Korollar: Sei $(\underline{M}, \omega)$ präsymplektisch und regulär.

$(\underline{M}, \omega)$ sei der symplektische Quotient. Dann gilt:

a) Ist ω integral, so ist auch ω integral.

b) Die Abbildung $L^C \rightarrow \underline{L}^C$ aus 8.18. liefert eine Injektion von $\text{PQB}(\underline{M}, \omega)$ (der Kategorie aller PQBs über $(\underline{M}, \omega)$) in $\text{PQB}(\underline{M}, \omega)$.

Diese Inklusion ist i.A. nicht surjektiv, da i.A. nur eine Projektion von $\mathcal{T}_1(\underline{M})$ auf $\mathcal{T}_1(\underline{M})$ existiert.

Die Frage, ob man durch Quotientenbildung aus einem PQB über M ein PQB über $\underline{M}$ erhält, läßt sich allgemein nicht beantworten. Für den Fall zu $\mathbb{R}^n$ diffeomorpher charakteristischer Fasern in M (einfach zusammenhängend !) erhält man:

8.20.Satz: Sei (M, ω) eine präsymplektische Mf. (L^C, α^C) PQB über (M, ω) . Das charakteristische Bündel CM habe folgende Eigenschaften:

1. Die Faserung von CM ist regulär.
2. CM sei parallelisierbar und es gebe n nicht-periodische, nullstellenfreie Vektorfelder, die CM aufspannen.

Dann ist $\underline{L}^C := L^C / \mathcal{E}M$ ein PQB über $\underline{M} = M/CM$ und es gelten die Beziehungen von 8.18.

Beweis: Sei $p_L: L^C \rightarrow \underline{L}^C$ die kanonische Projektion.

a) Definiere $\mathcal{P}: \underline{L}^C \rightarrow \underline{M}$ durch $\mathcal{P}(p_L(x_m)) := p(m)$.

Nach Konstruktion ist $\mathcal{P}$ wohldefiniert.

b) $\mathcal{T} \times \underline{L}^C \rightarrow \underline{L}^C$ wird definiert: $(c, p_L(x_m)) \mapsto p_L(c \cdot x_m)$.

Ist $p_L(x_m) = p_L(x'_m)$ so ist $x'_m = F_t(x_m)$ mit F_t Fluß eines Vektorfeldes aus $\tilde{\mathcal{E}}L^C$. Equivarianz von F_t liefert damit die Wohldefiniertheit der Operation.

c) Sei $\mathcal{P}(x_m) = \mathcal{P}(y_m)$ und $x_m \neq y_m$. Dann sind x und y nicht durch einen Fluß von Elementen aus $\tilde{\mathcal{E}}L^C$ verbindbar, da die Fasern von M einfach zusammenhängend sind und der Paralleltransport der Flüsse aus $\mathcal{E}M$ trivial ist, denn ω verschwindet auf den Fasern von CM . Also folgt $p_L(x_m) \neq p_L(y_m)$ und damit ist die Operation von $\mathcal{T}$ frei auf den Fasern.

d) Operation ist transitiv nach Konstruktion.

f) Operation ist C^∞ : Wähle Frobeniuskarten auf L^C .

g) Sei $Z \in \mathcal{X}^{\text{hor}} L^C$ mit $\text{Tp}_L \circ Z = 0$ Dann ist Z zu Elementen aus

$\mathcal{E}M$ $\mathcal{P}$ -bezogen. $\Rightarrow \text{KerTp}_L \subset \text{Ker}\alpha^C$. Damit existiert eindeutig

$\alpha^0 \in \Omega^1 \underline{L}^C$ mit $p_L^* \alpha^0 = \alpha^C$ und α^0 ist Zusammenhangsform auf $\underline{L}^C$.

Bezeichne PQB^{fak} alle (präsymplektischen) PQBs, die im Sinne von 8.20. faktorisierbar sind. (Insbesondere also eine reguläre Basis haben). Für diese Bündel lassen sich nach 8.18. die liftbaren Schnitte vermittels des Liouville Maßes auf der Quotientenmannigfaltigkeit $\underline{M}$ zu einem Hilbertraum machen. Wendet man auf diesen Hilbertraum die Konstruktion von Kapitel 4 an, so erhält man mit den Argumenten aus Kapitel 6 und mit 8.18.:

8.21.Theorem: Sei $\text{PQB}^{\text{fak},e}$ die Kategorie aller endlichdimensionalen faktorisierbaren PQBs. Dann liefert die Konstruktion aus 8.7. bis 8.18. einen kovarianten Funktor

$$\underline{K}: \text{PQB}^{\text{fak},e} \longrightarrow \text{PQB}.$$

Ist $\mathbb{H}$ der Hilbertraum aller liftbaren L^2 -Schnitte in dem PQB $(L, \nabla, \langle, \rangle)$, so ist für jedes $f \in \mathcal{F}hM$ $k(f)$ ein antisymmetrischer Operator auf $\mathbb{H}$.

Zusammenfassend seien noch einmal die Beziehungen der eingeführten Objekte für den faktor/sierbaren Fall aufgelistet:

Man erhält folgende Projektionen:

$$\begin{array}{ll} (M, \omega) & \longrightarrow (\underline{M}, \underline{\omega}) & \mathcal{H} M & \longrightarrow \mathcal{H} \underline{M} \\ (L, \alpha) & \longrightarrow (\underline{L}, \underline{\alpha}) & \mathcal{C} M & \longrightarrow 0 \\ \text{Präs}(M, \omega) & \longrightarrow \text{Spl}(\underline{M}, \underline{\omega}) & \mathcal{D} L & \longrightarrow \mathcal{D} \underline{L} \\ \text{Präs}^0(M, \omega) & \longrightarrow 0 & \tilde{\mathcal{C}} L & \longrightarrow 0 \\ \text{Preq}(L, \alpha) & \longrightarrow \text{Preq}(\underline{L}, \underline{\alpha}) \\ \text{Preq}^0(L, \alpha) & \longrightarrow \Gamma \end{array}$$

Folgende Objekte sind isomorph:

$$\begin{array}{ll} \text{Präs}(M, \omega) \cong \text{Spl}(\underline{M}, \underline{\omega}) & \mathcal{H} M \cong \mathcal{H} \underline{M} \\ \text{Preq}(L, \alpha) \cong \text{Preq}(\underline{L}, \underline{\alpha}) & \mathcal{D} L \cong \mathcal{D} \underline{L} \\ \Gamma^\infty L \cong \Gamma^\infty \underline{L} & \mathcal{F}hM \cong \mathcal{F}h \underline{M} \end{array}$$

Ebenso, wie im symplektischen Fall die Präquantisierungsabbildung eine Prä-Schrödinger-Gleichung liefert, läßt sich im präsymplektischen Fall eine Prä-Klein-Gordon-Gleichung formulieren:

8.22.Definition: Sei (L, α) PQB über (M, ω) . $f \in \mathcal{F}M$

Dann heißt der Operator $k(f)$ auf $\Gamma^\infty L$ Prä-Klein-Gordon-Operator. (P

Die Gleichung $k(f)\varphi = 0$ heißt Prä-Klein-Gordon-Gleichung. (PKGG

Bemerkung: Für L faktorisierbar ist also $k(f)$ ein antisymmetrischer Operator auf dem Hilbertraum $K(L)$.

Man kann $k(f)$ auch auf $\Gamma^\infty L$ betrachten, das ergibt eine $\mathbb{C}M$ -Schar von Operatoren.

Besonders einfach wird der Fall für $f=0$. Dann ist auf $\Gamma^\infty L$ auch $k(f) = 0$, d.h. $\Gamma^\infty L$ ist Lösungsmenge der PKGG.

Es ergibt sich die Frage, ob man eine PKGG stets auf diesen Fall zurückführen kann. Eine Teilantwort auf diese Frage für den Fall von Fastkontaktmannigfaltigkeiten mit Zeitform soll zum Abschluß dieses Kapitels gegeben werden:

8.23.Definition: Eine präsymplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) der Charakteristik 1 heißt Fastkontaktmannigfaltigkeit.

Eine 1-Form η auf M heißt Zeitform, wenn gilt:

$$(i) \text{ Ker } \eta \oplus \text{ CM} = \text{ TM} \quad (ii) \quad d\eta = 0$$

Das durch $\underline{t} \lrcorner \omega = 0$ und $\underline{t} \lrcorner \eta = 1$ eindeutig bestimmte Vektorfeld $\underline{t}$ auf M heißt das ausgezeichnete (Zeit-)Vektorfeld. (vgl[8], Kap.4)

Bemerkung: Es muß nicht auf jeder Fastkontaktmannigfaltigkeit eine Zeitform geben. Der Name Zeitform ergibt sich aus der Tatsache, daß lokal stets $\eta = dt$, $t \in \mathbb{J}M$ gilt und daher eine einheitliche Parametrisierung der charakteristischen Kurven gegeben ist.

8.24.Theorem: Sei (M, ω) eine Fastkontaktmannigfaltigkeit mit Zeitform η . $(L, \nabla, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sei PQB über (M, ω) und $f \in \mathcal{F}hM$. Dann gibt es eine kovariante Ableitung $\tilde{\nabla}$ auf L mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $(L, \tilde{\nabla})$ ist ebenfalls PQB über M zu $(L^C, \tilde{\alpha}^C)$ assoziiert.

(ii) $\text{curv } \tilde{\alpha}^C = \omega + df \wedge \eta$

(iii) Für alle $\varphi \in \Gamma^\infty L$ gilt:

$$\tilde{\nabla}_Z \varphi = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \nabla_Z \varphi + if \cdot \varphi = 0$$

(Z ist das ausgezeichnete Vektorfeld von (M, ω, η)).

Beweis: Sei (L^C, α^C) zu (L, ∇) gehörige $\mathbb{T}$ -Bündel.

Setze: $\tilde{\alpha}^C := \alpha^C - (f \circ \tilde{r}^C) \cdot \tilde{r}^{C*} \eta$ d.h. $\tilde{\alpha} = \alpha - 1 \cdot (f \circ \tilde{r}) \cdot \tilde{r}^* \eta$.

Bezeichne mit Z^h die invariante horizontale Liftung von Z bzgl. α und mit $Z^{\tilde{h}}$ die bzgl. $\tilde{\alpha}$ in L . Dann folgt:

$$Z^{\tilde{h}} = Z^h + 1(f \circ \tilde{r}) \cdot \hat{1}$$

Für die Zusammenhänge erhält man mit $q: L \times \mathbb{C} \longrightarrow L$ (vgl [9]):

$$q^* \tilde{\nabla}_Z \varphi = \mathbb{L}_{Z^{\tilde{h}}} (q^* \varphi) = \mathbb{L}_{Z^h} (q^* \varphi) + \mathbb{L}_{1 \cdot f \circ \tilde{r}} \cdot \hat{1} \cdot q^* \varphi = q^* (\nabla_Z \varphi + if \cdot \varphi),$$

da $\hat{1}$ Fundamentalvektorfeld und $q^* \varphi$ equivariant ist.

Damit ist alles gezeigt.

9. Klassische und relativistische

Teilchendynamik

In diesem Kapitel soll kurz erläutert werden, wie sich die Ergebnisse des letzten Kapitels auf die Präquantisierung von zeitabhängigen klassischen und allgemein relativistischen Teilchensystemen anwenden lassen. Dabei werden wir uns bei der Formulierung der zugrunde liegenden dynamischen Systeme auf die Untersuchungen in [8] stützen.

I. Klassische, zeitabhängige Mechanik [1], [8], [19], [24].

Grundlagen: Sei (N, ω_N) eine symplektische Mannigfaltigkeit, der Phasenraum des Systems.

Definiere: $M := \mathbb{R} \times N$ mit den Projektionen $p_N: \mathbb{R} \times N \rightarrow N$ und $t: \mathbb{R} \times N \rightarrow \mathbb{R}$. M heißt der Entwicklungsraum des Systems und t repräsentiert die Zeit. Mit $\omega_0 := p_N^* \omega_N \in \Omega^2 M$ gilt der Satz: (M, ω_0, dt) ist eine Fastkontaktmannigfaltigkeit mit Zeitform.

a) Die Dynamik des Systems wird durch die zeitabhängige Hamiltonfunktion $f \in \mathcal{F}M$ bestimmt:

Sei $f_t := f|_{\{t\} \times N}$ und $X_t \in \mathcal{H}N$ sei definiert durch $X_t \lrcorner \omega_N = df_t$, d.h. X_t ist das zum Zeitpunkt t gehörige Hamiltonsystem auf N . Sei ferner $X_f \in \mathcal{X}M$ gegeben durch $X_f(t, n) = (0, X_t(n)) \in T\mathbb{R} \times TN \cong TM$. X_f stellt eine $\mathbb{R}$ -Parameterschar von Hamiltonsystemen X_t auf M dar.

Postulat: Die Trajektorien des klassischen Systems im Entwicklungsraum M werden gegeben durch das Vektorfeld

$$Z_f := X_f + \frac{\partial}{\partial t}$$

- b) Eine von der Zerlegung $M = R \times N$ des Entwicklungsraumes unabhängige und damit adäquatere Formulierung der Dynamik läßt sich mit Hilfe der Cartanform geben:

Definiere: $\omega_f := \omega_0 + df \wedge dt$ dann gilt der

Satz: (M, ω_f, dt) ist eine Fastkontaktmannigfaltigkeit mit Zeitform und das Vektorfeld Z_f ist eindeutig bestimmt

durch

$$Z_f \lrcorner \omega_f = 0$$

und

$$Z_f \lrcorner dt = 1$$

- c) Schließlich läßt sich das System auch im homogenen Formalismus darstellen (Näheres siehe [8]):

Sei $M_R := R \times M$ der homogene Entwicklungsraum mit den Projektionen $p_M: M_R \rightarrow M$ und $s: M_R \rightarrow R$ und der Injektion $i_0: M \hookrightarrow M_R$, $m \mapsto (0, m)$.

Definiere: $\Omega := p_M^* \omega_f + ds \wedge d\tilde{t}$ $\tilde{t} := t \circ p_M$.

Ω ist eine symplektische Form und es gilt der

Satz: Die Vektorfelder $-ds^\#$ und Z_f sind i_0 -bezogen $^\#$ bzgl. Ω !

D.h. $-s$ ist die homogene Hamiltonfunktion des Systems und $M = s^{-1}(0)$ stellt sich als Energiefläche von $-s$ dar.

II. Präquantisierung zeitabhängiger klassischer Systeme

Voraussetzung: ω_N sei integral (Quantisierungsbedingung).

- a) Sei (L_N, ω_N) ein PQB über (N, ω_N) .

Dann erhält man zu jedem $t \in R$ einen Prä Schrödingeroperator $k_N(f_t) \in \text{End } \Gamma^\infty L_N$. Das ergibt ein zeitabhängiges Vektorfeld (R -Parameterschar von Vektorfeldern) auf $H_N := \Gamma^2 L_N$ und führt zur zeitabhängigen Prä Schrödingergleichung für Kurven $t \mapsto \varphi_t \in H_N$ in H_N :

$$\boxed{-k_N(f_t) \cdot \varphi_t = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\nabla_{X_t}^N \varphi_t + i\hbar f \cdot \varphi_t = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t} \quad ,$$

wobei ∇^N die kovariante Ableitung des PQB (L_N, ∇^N) über (N, ω_N) ist.

Sei $(p_N^* L_N, \nabla^0)$ das nach 8.18. induzierte PQB über (M, ω_0) .

$$\begin{array}{ccc} (p_N^* L_N, \nabla^0) & \longrightarrow & (L_N, \omega_N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M, \omega_0) & \longrightarrow & (N, \omega_N) \end{array}$$

Dann lassen sich Schnitte in $p_N^* L_N$

mit Kurven in ΓL_N identifizieren durch $\psi(t, n) := \varphi_t(n)$.

Außerdem sieht man leicht, daß $p_N^* L_N \cong \mathbb{R} \times L_N$ und daß das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathcal{X}(\mathbb{R} \times L_N)$ in $(p_N^* L_N, \nabla^0)$ invariant und horizontal ist. Damit geht aber $\frac{\partial}{\partial t}$ bei der Identifizierung von Schnitten mit Kurven in $\nabla_{\mathcal{X}}^0$ über, und man erhält die folgende Darstellung der zeitabhängigen PSG:

$$\nabla_{X_f}^0 \varphi_t + i\hbar f \cdot \varphi_t = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\nabla_{Z_f}^0 \psi + i\hbar f \cdot \psi = 0}$$

wobei ψ der zur Kurve φ_t in ΓL_N gehörige Schnitt in $p_N^* L_N$ ist.

b) Mit 8.24. läßt sich die Gleichung sofort umformulieren:

Auf $L := p_N^* L_N$ gibt es eine kovariante Ableitung ∇^f derart, daß sich die PSG schreiben läßt:

$$\boxed{\nabla_{Z_f}^f \psi = 0 \text{ für } \psi \in \Gamma^\infty L.}$$

Außerdem ist nach 8.24. (L, ∇^f) ein PQB über M mit der Krümmungsform $\omega_0 + df \wedge dt = \omega_f$. Das ist aber gerade die Cartanform aus I.b). Damit hat man:

Satz: Ist k die Präquantisierungsabbildung des PQB (L, ∇^f) über (M, ω_f) , so läßt sich die zeitabhängige PSG als Prä-Klein-Gordon-Gleichung zur Nullfunktion in (L, ∇^f) formulieren:

$$\boxed{k(0) \psi = 0 \text{ für } \psi \in \Gamma^\infty L}$$

Schließlich läßt sich auch noch der Spezialfall, daß

(M, ω) regulär ist, betrachten.

$$\begin{array}{ccc} (L, \alpha^f) & \longrightarrow & (L, \alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M, \omega_f) & \longrightarrow & (M, \omega) \end{array}$$

Nimmt man zusätzlich an, daß über

dem symplektischen Quotienten (M, ω)

ein PQB (L, α) existiert, das (L, α^f)

wie in 8.18. induziert (das ist z.B. der Fall, wenn Z_f

vollständig und periodenfrei ist [8], [14]), so erhält man

den Satz von Kostant [14]:

Satz: Unter den angegebenen Voraussetzungen sind die

Lösungen der zeitabhängigen PSG gerade die liftbaren

Schnitte in (L, α^f) .

- c) Eine weitere Möglichkeit ist die Präquantisierung des homogenen Entwicklungsraumes.

Sei (L_R, α_R) PQB über (M_R, Ω) und (L, α^f)

die Einschränkung auf (M, ω_f) . Dann ist

(L, α^f) ein PQB über (M, ω_f) außerdem gilt

$$\begin{array}{ccc} (L_R, \alpha_R) & \longleftrightarrow & (L, \alpha^f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M_R, \Omega) & \longleftrightarrow & (M, \omega_f) \end{array}$$

$L_R \cong \mathbb{R} \times L$. Die Schnitte in L ergeben sich durch Einschränkung

von Schnitten in L_R , ebenso ergibt sich die Präquantisierungsabbildung in L durch Einschränkung von der in L_R .

Die Prä-Klein-Gordon-Gleichung für $-s \in \mathcal{F}_{M_R}$ lautet:

$$k(-s)\varphi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \nabla_{ds^*}\varphi + i\hbar s \cdot \varphi = 0.$$

Durch Einschränkung auf $s^{-1}(0)$ folgt wieder die PSG

$$\nabla_{Z_f}\varphi = 0 \quad \text{Zusammenfassend:}$$

Satz: Die Präquantisierung im präsymplektischen Formalismus ergibt sich durch Einschränkung von der im homogenen Formalismus.

Bemerkung: Diese Aussage läßt sich auch allgemein für die Einschränkung auf Energieflächen bei symplektischen Systemen verwenden.

III. Allgemein relativistische Einteilchensysteme

Grundlagen: Sei $(B, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine 4-dimensionale pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit. B ist die Raum-Zeit der allgemeinen Relativitätstheorie und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ beschreibt das Gravitationsfeld.

a) In der relativistischen Dynamik geht man zweckmäßigerweise vom homogenen Formalismus aus.

Sei $\hat{T}^*B := T^*B \setminus \text{Nullschnitt}$ der homogene Entwicklungsraum.

Ω sei symplektische Form auf $\hat{T}^*B$.

Bemerkung: Betrachtet man nur Gravitationskräfte, so ist

$\Omega = \Omega_0$, die kanonische symplektische Form auf $\hat{T}^*B$.

Bei Elektromagnetischen Kräften setzt man $\Omega = \Omega_0 + \pi^*F$, wobei $\pi: T^*B \rightarrow B$ die Projektion und $F \in \Omega^2 B$ das Elektromagnetische Feld ist.

Die homogene Hamiltonfunktion s ist gegeben durch

$s := |\langle \cdot, \cdot \rangle|^{\frac{1}{2}}$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf T^*B induziert ist.

Die Trajektorien des Systems werden durch das Vektorfeld $-ds^\#$ gegeben. Falls $s \neq 0$ (sonst läßt sich ^{u.d.} nicht differenzieren).

b) Die entsprechende Cartanformulierung ergibt sich durch Einschränkung auf Energieflächen:

$S^m B := s^{-1}(m)$ für $m \in \mathbb{R}$. 'Massenschalenbündel'

Die $S^m B$ sind Bündel mit 3-dimensionalen Fasern über B .

Die Fälle $m=0$ oder $m < 0$ sind vom Formalismus zugelassen (Photonen, Tachyonen). Das ist der Vorteil gegenüber a).

Die $S^m B$ bilden mit der Einschränkung von Ω Fastkontaktmannigfaltigkeiten, die Trajektorien des Systems werden durch die charakteristischen Fasern der $S^m B$ gegeben. (siehe $\tilde{u}, c$).

Es ist typisch für den relativistischen Fall, daß die Trajektorien nicht parametrisiert sind.

Für $m \neq 0$ und $\Omega = \Omega_0$ gibt es eine kanonische Parametrisierung durch die Fundamental-1-Form Θ_0 auf $\hat{T}^*B$:

Es wird ein charakteristisches Vektorfeld Z durch die Forderung $Z \lrcorner \Theta_0 = 1$ ausgezeichnet. Dies entspricht der Parametrisierung über die Eigenzeit. Für $m=0$ ist das nicht möglich, da für $m=0$ Θ_0 auf den charakteristischen Fasern verschwindet. (näheres siehe [8], Kap.3)

Schließlich sei noch erwähnt, daß sich für die S^m_B Zeitformen konstruieren lassen. Diese entsprechen dann der Auswahl eines Atlanten mit wie in I. strukturierten Karten, bzw. einer Auszeichnung von lokalen Inertialsystemen.

IV. Präquantisierung relativistischer Teilchen

Voraussetzung: Ω sei integral (Quantisierungsbedingung)

Es wird wie in II. vorgefahren:

Sei (L, α) ein PQB über (T^*B, Ω) , k die zugehörige Quantisierungsabbildung. Dann lautet die PKGG:

$$k(s)\varphi = 0$$

Schränkt man auf S^m_B ein, zeichnet ein charakteristisches Vektorfeld Z aus und setzt $\hbar = 1$ so geht die PKGG über in

$$\nabla_Z \varphi + i m \cdot \varphi = 0$$

D.h. die PKGG ergibt sich auf S^m_B durch Präquantisierung der konstanten Funktion m gemäß Kapitel 8.

Konstruiert man sich eine Zeitform auf S^m_B , und ist S^m_B regulär, so lassen sich die Lösungen der PKGG auch als Schnitte in einem PQB über der 6-dimensionalen Mannigfaltigkeit S^m_B darstellen (nach 8.24.).

Schließlich sei noch eine lokale Darstellung der PKGG gegeben:

Sei $B = \mathbb{R}^4$ und $(q_0, q_1, q_2, q_3; p_0, p_1, p_2, p_3)$ Koordinaten von T^*B . $s(q; p_0, p_1, p_2, p_3) = (\sum_1^3 p_i^2 - p_0^2)^{1/2}$, $\Omega = \sum_0^3 dq_i \wedge dp_i$.

Dann ist $ds = -\frac{1}{s}(\sum_i^3 p_i dp_i - p_0 dp_0)$ und daher

$-s \cdot X_s = \sum_i^3 p_i \frac{\partial}{\partial q_i} - p_0 \frac{\partial}{\partial q_0}$. Also lautet der PKGO:

$$K(\mathbf{m}) = \left(\nabla \left(\sum_i^3 p_i \frac{\partial}{\partial q_i} - p_0 \frac{\partial}{\partial q_0} \right) + 1 \right) \quad \text{auf } S^{\mathbf{m}}B.$$

bei entsprechender Normierung der Trajektorien.

Die Terme $p_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ tauchen auch bei der Präquantisierung

einer klassischen Hamiltonfunktion $H = \frac{p^2}{2m}$ auf und gehen bei Wahl der p-Polarisation in die Operatoren $\frac{\partial^2}{\partial q^2}$

über, daher ergibt sich aus der PKGG bei Quantisierung in der p-Polarisation die übliche Klein-Gordon-Gleichung.

Literatur

- [1] R.Abraham/J.E.Marsden: Foundations of Mechanics
Benjamin, Reading Mass. (1967)
- [2] J.D.Bjorken/S.D.Drell: Relativistische Quantenmechanik
B.I.Hochschultaschenbücher, Mannheim (1966)
- [3] P.R.Chernoff/J.E.Marsden: Properties of infinite dimensional Hamiltonian Systems
Springer Lecture Notes 425 (1974)
- [4] G.G.Ehch: Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory
John Wiley and Sons, Inc. New York, London (1972)
- [5] H.I.Elliasson: Geometry of Manifolds of Maps
Jour.Diff.Geom. 1, 169-194 (1967)
- [6] P.Flaschl/W.Klingenberg: Riemannsche Hilbertmannigfaltigkeiten, Periodische Geodätische
Springer Lecture Notes in Math. 282 (1972)
- [7] K.Gawedzki/T.Szapiro: On Quantization of Dynamical Groups
Rep.Math.Phys. 6, 477-485 (1974)
- [8] C.Günther: Präsymplektische Geometrie und Quasikanonische Systeme, Diplomarbeit, Berlin(1974)
- [9] W.Greub/S.Halperin/R.Vanstone: Connections, Curvature, and Cohomology II
Academic Press, New York/London (1973)
- [10] H.Heß: Sesquilinear verknüpfte Korrekturbündeltheorien in der Geometrischen Quantisierung
Diplomarbeit, Berlin(1976)
- [11] H.Holmann/W.Rummler: Alternierende Differentialformen
Bibliographisches Institut, Zürich (1972)
- [12] J.M.Jauch: Foundations of Quantum Mechanics
Addison-Wesley, Reading Mass. (1968)
- [13] B.Kostant: Quantization and Unitary Representations
in: Lectures on modern analysis and applications III
ed.C.T.Taam, Springer Lecture Notes in Math. 170 (1970)

- [14] B.Kostant: Line Bundles and the Prequantized Schrödinger Equation, Preprint (1973)
- [15] S.Lang: Differential Manifolds
Addison-Wesley, Reading Mass. (1972)
- [16] G.W.Mackey: Mathematical Foundations of Quantum Mechanics
Benjamin, New York (1963)
- [17] J.E.Marsden: Hamiltonian One Parameter Groups
Arch.Rat.Mech.Anal. 28, 362-396 (1968)
- [18] J.E.Marsden: Applications of Global Analysis in Mathematical Physics
Publish or Perish Inc. Lect.Notes 3, Boston Mass. (1974)
- [19] R.Ouzilou: Géométrie Symplectique des Variétés Banachiques
Lyon(1972)
- [20] R.Ouzilou: Groupes et Algèbres de Lie
Saint-Etienne (1972)
- [21] H.Rund: The Hamilton Jacobi Theory in the Calculus of Variations
van Nostrand (1966)
- [22] I.E.Segal: Mathematical Problems of Relativistic Physics
AMS, Providence Rhode Island (1963)
- [23] J.Sniatycki/W.M.Tulczyjew: Canonical Dynamics of Relativistic Charged Particles
Ann.Inst.H.Poincaré A XVI, 177-187 (1971)
- [24] J.M.Souriau: Structure des Systèmes Dynamiques
Dunod, Paris (1970)
- [25] V.S.Varadarajan: Geometry of Quantum Theory I,II
Van Nostrand, Princeton/New Jersey (1968)
- [26] I.Vaisman: Cohomology and Differential Forms
Marcel Dekker, Inc. New York (1973)

Bezeichnungen

Mannigfaltigkeit bedeutet immer- falls nichts anderes vereinbart wurde- parakompakte, T_2 -topologische, zusammenhängende G^∞ -Banachmannigfaltigkeit, nach einem Raum mit C^∞ -Normen modelliert. Ebenso werden alle nicht näher bezeichneten Abbildungen als C^∞ vorausgesetzt.

Die Symbole werden -mit geringen Modifikationen- von 1 übernommen. Im einzelnen werden benutzt:

T	Tangentenfunktor
$\mathcal{F}M$	Ring der C^∞ -Funktionen
$\mathcal{X}M$	$\mathcal{F}M$ -Modul der Vektorfelder
$\Omega^k M$	Alternierende k-Formen
$\wedge$	Äußeres Produkt
L	Lie-Derivierte
$\lrcorner$	Inneres Produkt
$L = T_e$	Lie-Funktor
hor	= horizontal, ver = vertikal
inv	= invariant, equ = equivariant
$\mathcal{H}_l M$	lokal hamiltonsche Vektorfelder
$\mathcal{H}M$	global hamiltonsche Vektorfelder
$\mathcal{C}M$	charakteristische Vektorfelder

ω, Ω bezeichnen stets symplektische Formen

Diff	Diffeomorphismengruppe
Spl	Symplektomorphismengruppe
Präs	Präsymplektomorphismengruppe
Preq	Präquantomorphismengruppe

Ein Punkt über einem Objekt bedeutet weglassen der Null oder des Nullschnittes.

Lebenslauf

Geboren am 18. Juli 1949 in Berlin.

Eltern: Joachim Günther, Dozent an der Hochschule für Musik
Berlin

Retraut Günther, geb. von Koerber.

Schulbesuch: 1956-1960 Grundschule

1960-1966 Schadowschule, Berlin Zehlendorf
(Humanistisches Gymnasium)

1966-1968 Werdenfelsgymnasium, Garmisch-Partenkirchen
1968 Abitur.

Seit Wintersemester 1968/69 Studium der Mathematik und Physik
an der Freien Universität Berlin.

Sommersemester 1970: Vordiplome in Mathematik und Physik.

1971-1975: Stipendiat der Studienstiftung des deutschen Volkes.

1970-1975: Tutor am Fachbereich Mathematik der Technischen
Universität Berlin.

Dezember 1974: Diplom in Mathematik an der Freien Universität
Berlin.

Seit Oktober 1975: Assistent am Fachbereich Mathematik der
Technischen Universität Berlin.

